De Moivre

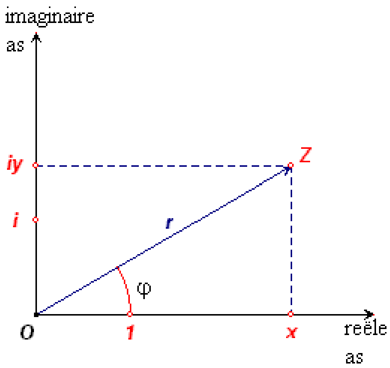
1. De Stelling (formule) van De Moivre (1667-1754) luidt:

Stelling 1
Is z een complex getal met $|z| = 1$, dan is voor elk natuurlijk getal n

$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

Opmerking - Wat in deze stelling $|z|$ betekent en wat φ is, volgt in het onderstaande.

In het complexe vlak kan je elk complex getal $z = x + iy$ voorstellen als een punt Z met coördinaten (x, y).
Maar het kan ook anders als we in het complexe vlak de (positief geöriënteerde) hoek bekijken tussen het lijnstuk OZ en de positieve reële as.



Is die hoek gelijk aan φ en is verder $|OZ| = r$, dan hebben we ook

$$z = r\cos\varphi + r\cdot i\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Er geldt immers: $x = r\cos\varphi$ en $y = r\sin\varphi$.

r heet de ***modulus*** (meervoud: moduli) van het complexe getal z. Er geldt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
We schrijven voor deze uitdrukking $|z|$. We zeggen ook wel $|z|$ is de 'lengte' van z.
(Zie hierboven in de formulering van de Stelling van De Moivre.)
De hoek φ wordt het ***argument*** van het complexe getal z genoemd.
We schrijven dan: $\arg(z) = \varphi$.
(Zie weer hierboven in de formulering van de Stelling van De Moivre.)

Uit de vermenigvuldiging van twee complexe getallen $z_1 = \cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1$ en $z_2 = \cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2$:

$$\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) \\ &= r_1r_2(\ (\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\ ) \\ &= r_1r_2(\ \cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\ ) \end{aligned}$$

vinden we dus eenvoudig:

$$|z_1\cdot z_2| = r_1r_2$$

en

$$\arg(z_1\cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$$

Opmerking - In de afleiding van het product van twee complexe getallen is gebruik gemaakt van twee bekende *optelformules* uit de goniometrie (zie eventueel de zogenoemde Formulekaart).

We kunnen hetgeen we hierboven hebben afgeleid, formuleren als:

Stelling 2
Bij het vermenigvuldigen van complexe getallen worden de moduli van die complexe getallen vermenigvuldigd en worden de argumenten opgeteld.

2. Het bewijs van Stelling 1

We gaan nu uit van een complex getal z waarvan de modulus gelijk is aan 1, $|z| = 1$ (z ligt dus op de eenheidscirkel).

Passen we de regel $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$ dan toe op het product $z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot z \cdots z}_{n \text{ keer}}$, waarbij $\arg(z) = \varphi$, dan vinden we dus

$$\arg(z^n) = \arg(z) + \cdots + \arg(z) = n \cdot \arg(z) = n\varphi$$

Omdat $|z| = 1$, is dus ook $|z^n| = 1$.

En hieruit volgt (eenvoudig):

$$z^n = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$$

En daarmee is de Stelling van De Moivre (Stelling 1 hierboven) bewezen.