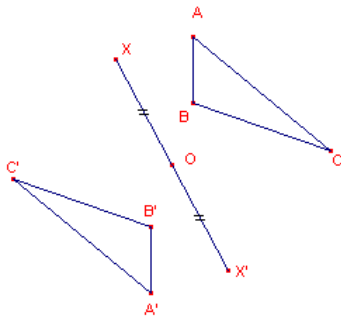


# Generalisatie van de spiegeling: de centrale collineatie

## 1. Puntspiegeling

figuur 1



Zij  $O$  een vast punt in het vlak.

De puntspiegeling  $P_O$  van een punt  $X$  met  $P_O(X) = X'$  wordt vastgelegd door

- $X'$  op de lijn  $OX$
- $XO = X'O$

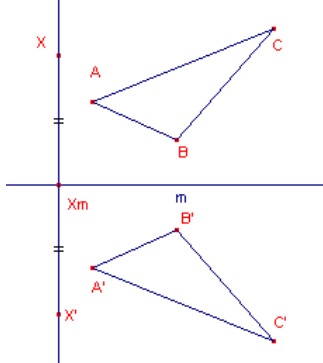
### Eigenschappen

De eigenschappen van deze afbeelding zijn genoegzaam bekend. We noemen er enkele.

- Congruentie van figuur en beeldfiguur.
- Origineel en beeld van overeenkomstige lijnen (lijnstukken) zijn evenwijdig.

## 2. Loodrechte lijnspiegeling

figuur 2



Zij  $m$  een willekeurige rechte lijn in het vlak.

De loodrechte lijnspiegeling  $L_m$  van een punt  $X$  met  $L_m(X) = X'$  in een lijn  $m$  wordt vastgelegd door

- $XX' \perp m$  met  $XX' \cap m = X_m$
- $XX_m = X'X_m$

### Opmerking

De lijnspiegeling wordt ook wel kortweg *spiegeling* genoemd.  
[einde Opmerking]

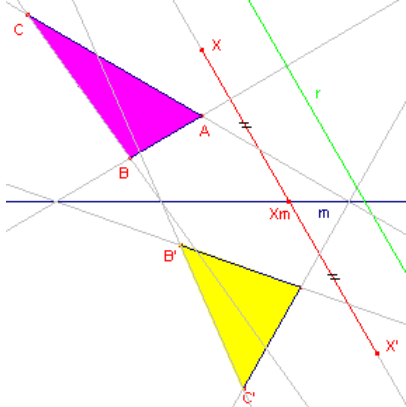
### Eigenschappen

Ook hier alleen een enkele:

- Congruentie van figuur en beeldfiguur.
- De lijn  $m$  is de **collineatie-as** van de snijpunten van overeenkomstige lijnen.

## 3. Scheve lijnspiegeling

figuur 3



Zijn  $m$  en  $r$  twee willekeurige lijnen in het vlak waarbij  $r$  niet loodrecht staat op  $m$ .

We noemen in dit verband de *scherpe* hoek  $\varphi$  tussen de lijnen  $m$  en  $r$  de **richting** van de spiegeling.

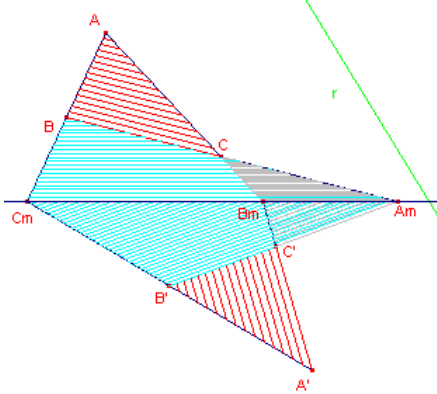
De scheve lijnspiegeling  $S_{m[r]}$  van een punt  $X$  met  $S_{m[r]}(X) = X'$  in de lijn  $m$  in de richting van een lijn  $r$  wordt vastgelegd door

- $XX' \parallel r$  met  $XX' \cap m = X_m$
- $XX_m = X'X_m$

### Eigenschappen

- Geen congruentie.
- De lijn  $m$  is de collineatie-as van de snijpunten van overeenkomstige lijnen.
- **De oppervlakte van een figuur is invariant bij scheve lijnspiegeling.**

#### Eerste bewijs (gedeeltelijk): figuur 4

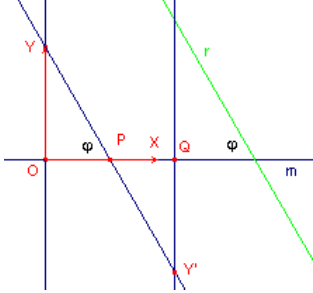


Zie hiervoor ook het Cabri-werkblad “Scheve spiegeling”.

De afstand van de punten  $X$  en  $X'$  tot de lijn  $m$  zijn gelijk, waardoor driehoeken die twee hoekpunten op de lijn  $m$  hebben gelijke oppervlakte hebben (zie figuur hiernaast).

Daaruit volgt dan gemakkelijk het algemene geval. ♦

#### Tweede bewijs (analytisch): figuur 5



We gaan uit van een orthonormaal assenstelsel. De lijn  $m$  laten we samenvallen met de  $x$ -as.

De basisvectoren zijn dan  $e_1 = (1,0)$  en  $e_2 = (0,1)$ .

Het beeld van  $e_1 = (1,0)$ . Zij  $Y'$  het beeld van het eindpunt  $Y$  van  $e_2$ . We hebben dan  $Y' = (x, -1)$ .

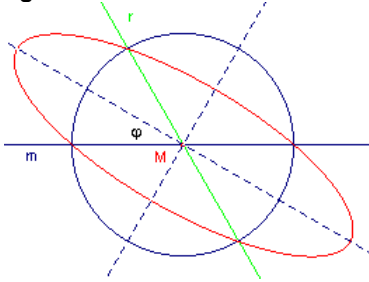
Voor  $P$ , het midden van  $OQ$  geldt dan  $OY/OP = \tan \varphi$ . Zodat uit  $OP = 1/\tan \varphi$  volgt:

$$x = 2/\tan \varphi.$$

Voor de determinant van de afbeelding  $S_{m[r]}$  geldt dan:

$$\text{Det}(S_{m[r]}) = \begin{vmatrix} 1 & 2/\tan \varphi \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

#### ♦ figuur 6



- Verhoudingen van lijnstukken (dubbelverhouding) zijn invariant.

- **Het beeld van een cirkel is een ellips (\*).**

De asrichtingen van de ellips zijn vast. Deze zijn evenwijdig met de bissectrices van de hoeken tussen de lijnen  $m$  en  $r$ .

Uit de invariantie van de dubbelverhouding volgt dat het middelpunt van de cirkel wordt afgebeeld op het middelpunt van de ellips.

Uit de gelijkheid van de oppervlakte van de cirkel en de ellips volgt eenvoudig, dat  $R^2 = ab$ , waarbij  $R$  de straal van de cirkel en  $a, b$  de lengtes zijn van de halve assen van de ellips.

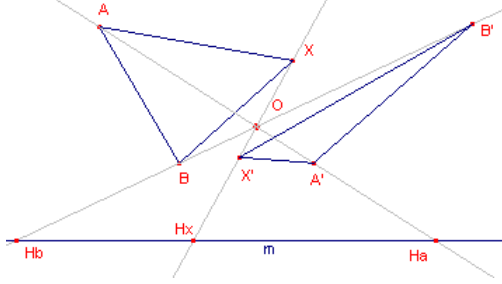
(\*) Het bewijs hiervan staat op Bijlage 1.

#### Opmerking

Indien de lijn  $r$  loodrecht staat op  $m$ , dan gaat de scheve lijnspiegeling over in de **loodrechte lijnspiegeling**.  
[einde Opmerking]

## 4. Centrale collineatie

figuur 7



O is een vast punt en  $m$  is een vaste lijn in het vlak.

Het beeld  $X'$  van een punt  $X$  bij een centrale collineatie  $C_{O,m}$  wordt vastgelegd door

$$(OHXX') = -1$$

waarbij H het snijpunt is van de lijn  $OX$  en de lijn  $m$ .

$(OHXX')$  is de *dubbelverhouding*  $\frac{XO}{XH} \div \frac{X'O}{X'H}$ . Hierbij worden de

lijnstukken van een teken voorzien (*gerichte lijnstukken*).

### Opmerking

Een centrale collineatie wordt ook wel *perspectiviteit* (of *perspectieve afbeelding*) genoemd.

[einde Opmerking]

### Eigenschappen

- Een centrale collineatie is een involutie.
- De punten van de lijn  $m$  zijn invariant.
- Lijnen door O zijn (niet-puntsgewijs) invariant.
- De dubbelverhouding van 4 punten is invariant.

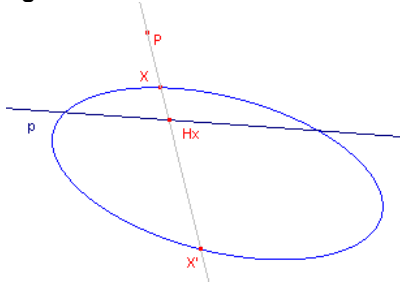
### Stelling

Zij  $P$  en  $p$  pool en poollijn van een kegelsnede  $K$ .

Bij de centrale collineatie met centrum  $P$  en as  $p$  is  $K$  (niet-puntsgewijs) invariant

### Bewijs:

figuur 8



Uit de definitie van poollijn van een punt tov. een kegelsnede volgt dat voor een punt  $X$  van  $K$  geldt:

$$(PH_xXX') = -1$$

waarbij  $X'$  het tweede snijpunt is van de lijn  $PX$  en de kegelsnede.

$X$  wordt dus bij de centrale collineatie afgebeeld op  $X'$ . ♦

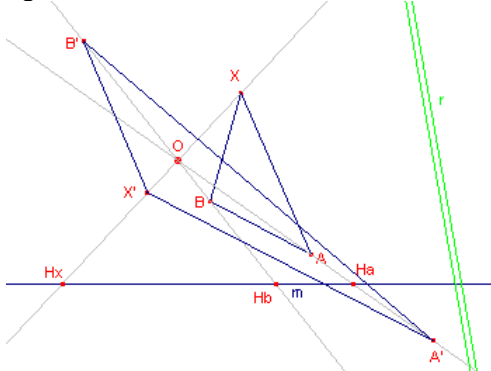
## 5. Generalisatie

[1]

Als  $O$  op  $l_\infty$  (de lijn op oneindig) ligt, dan gaat de centrale collineatie over in de **scheve spiegeling**.

Immers uit  $(OHXX') = -1$  volgt dan, dat H het midden is van het lijnstuk  $XX'$  (voor ieder punt  $X$ ).

figuur 9a

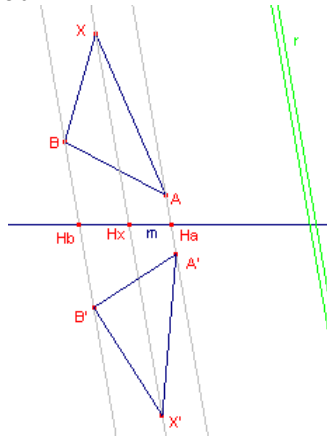


In figuur 9a wordt een punt  $R_\infty$  bepaald door de evenwijdige lijnen  $r$ .

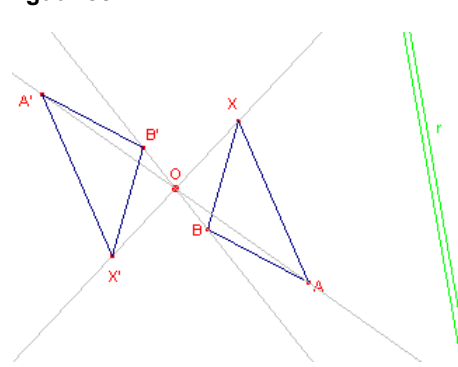
Door identificatie van  $O$  met  $R_\infty$  krijgen we dan figuur 9b.

Door identificatie van twee punten op  $m$  met twee punten op  $l_\infty$  krijgen we figuur 9c.

figuur 8b



figuur 8c



[2]  
 Als  $m \equiv l_\infty$ , dan gaat de centrale collineatie over in de **puntspiegeling met centrum O**. Immers uit  $(OHXX') = -1$  volgt dan dat O het midden is van het lijnstuk  $XX'$  (voor ieder punt X).

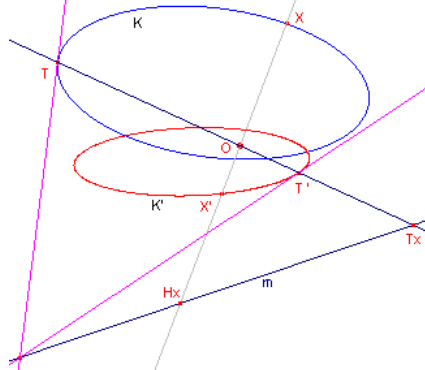
### 6. Andere eigenschappen van de centrale collineatie

#### Stelling

Een centrale collineatie beeldt een kegelsnede af op een kegelsnede.

#### Bewijs:

figuur 10



Een en ander volgt uit de projectieve eigenschappen van een kegelsnede, waardoor projectieve lijnenwaaiers door de centrale collineatie weer worden afgebeeld op waaiers met dezelfde eigenschappen. ♦

#### Gevolg

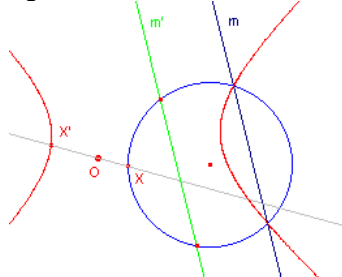
Bekijken we nu de vermenigvuldiging V met centrum O en factor  $\frac{1}{2}$ .

De collineatie-as van de centrale collineatie wordt door V afgebeeld op een rechte lijn  $m'$ .

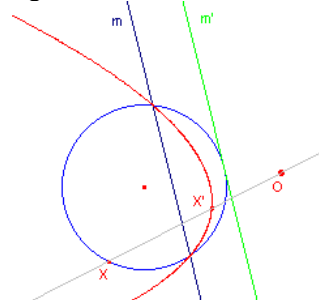
Deze lijn  $m'$  speelt nu een rol om de beelden van de kegelsneden te onderscheiden in hun verschillende typen: ellips, parabool en hyperbool.

Immers de punten van de lijn  $m'$  worden door de centrale collineatie afgebeeld op punten van  $l_\infty$  (het beeld van  $m'$  bij de centrale collineatie is  $l_\infty$ ).

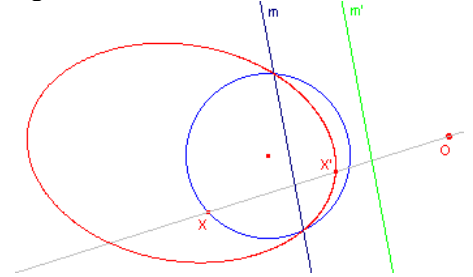
figuur 11a



figuur 11b



figuur 11c



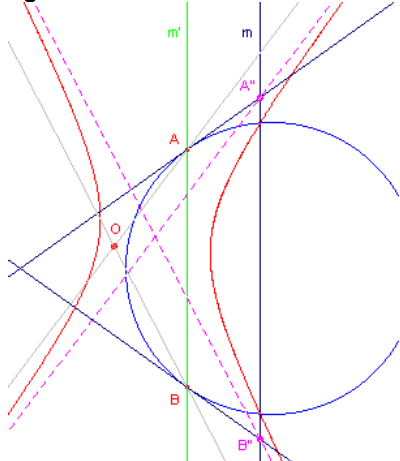
In figuur 11a snijdt de lijn  $m'$  de kegelsnede (in dit geval een cirkel) in twee verschillende punten. Het beeld van de cirkel is dus een **hyperbool**.

In figuur 11b raakt de lijn  $m'$  aan de cirkel. Het beeld van de cirkel is een **parabool**.

In figuur 11c heeft de lijn  $m'$  geen punten gemeen met de cirkel. Het beeld is een **ellips**.

### Asymptoten van een hyperbool

figuur 12



In figuur 12 snijdt de kegelsnede (in dit geval weer een cirkel) de lijn  $m$  in twee punten A en B.

Het beeld is dus een hyperbool.

De beelden van de punten A en B liggen dus op  $l_\infty$ .

De raaklijn in A (en B) wordt afgebeeld op de raaklijn in  $A_\infty$  (en  $B_\infty$ ). De beelden daarvan zijn dus de asymptoten van de hyperbool.

Echter, lijn (ic. de raaklijn in A) en beeldlijn (een asymptoot) snijden elkaar op  $m$ : het punt  $A''$ .

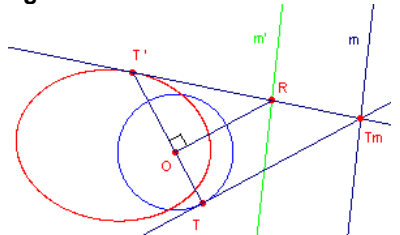
De lijn door  $A''$  evenwijdig aan de lijn OA is dus een asymptoot.

De lijn door  $B''$  evenwijdig aan de lijn OB is eveneens een asymptoot van de hyperbool.

### Een bijzonder geval

We laten het centrum O van de centrale collineatie samenvallen met het middelpunt van de cirkel.

figuur 13a



In figuur 13a is de lijn  $TT_m$  de raaklijn in T aan de cirkel.

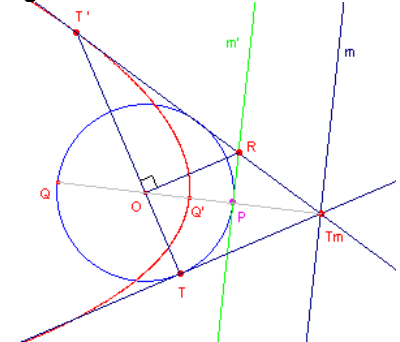
De lijn  $T'T_m$  is dan raaklijn aan (in dit geval) de ellips (het beeld van de cirkel bij de centrale collineatie met centrum O).

Deze lijn snijdt de lijn  $m'$  in het punt R.

Nu is dus hoek  $T'OR = 90^\circ$ .

**Het punt O is nu een brandpunt van de ellips; de lijn  $m'$  is de daarbij behorende richtlijn.**

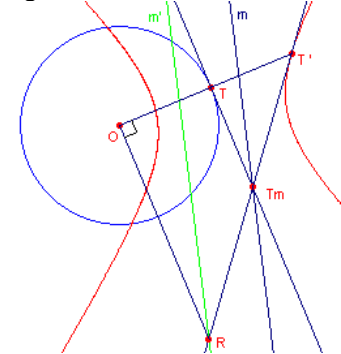
figuur 13b



In figuur 13b is de situatie weergegeven voor een parabool (de lijn  $m'$  raakt aan de cirkel).

Het punt Q (samen met het punt P snijpunten van de lijn  $OT_m$  en de cirkel) heeft als beeld het punt  $Q'$  (de top van de parabool).

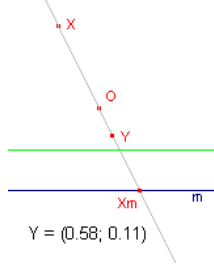
figuur 13c



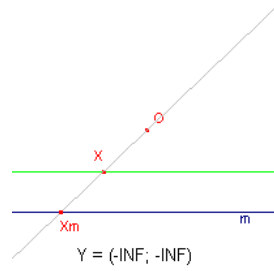
In figuur 13c zien we de situatie voor een hyperbool.



figuur 15b



figuur 15c



**Gevolg**

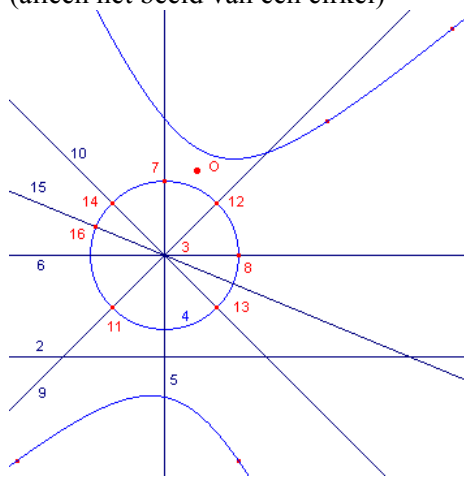
Als X gelegen is op het beeld van de lijn  $m$  bij vermenigvuldiging met  $\frac{1}{2}$  tov. O, dan is Y het oneigenlijk punt van de lijn OX (zie figuur 15b en figuur 15c).

Dan is X het midden van het lijnstuk  $OX_m$ .  
[einde Gevolg]

Op basis van de macro:CentrCollPunt kunnen we nu de macro:CentrCollineatie definiëren waarmee van andere objecten (zoals lijnstuk, lijn, cirkel, kegelsnede) het beeld bij een centrale collineatie kan worden geconstrueerd.

**macro:CentrCollineatie**

(alleen het beeld van een cirkel)



Constructiestappen uitgaande van het punt O (1), de lijn  $m$  (2) en een cirkel (middelpunt 3 en lijn 4):

5. Loodlijn(3, 2)
6. Loodlijn(3, 5)
- 7, 8. Snijpunt(5, 4), Snijpunt(6, 4)
9. Middelloodlijn(1, 8)
10. Loodlijn(3, 9)
- 11, 12. Snijpunten(9, 4)
- 13, 14. Snijpunten(10, 14)
15. Middelloodlijn(7, 11)
16. Snijpunt(15, 4)
17. (geen nummer) macro:CentrCollPunt(16, O, m)
- 18, 19, 20, 21 ... eveneens toegepast op de punten 11, 13, 14, 12
22. Kegelsnede(17, 18, 19, 20, 21)

Beginobjecten: cirkel, O,  $m$

Eindobject: kegelsnede (in dit geval dus de hyperbool)