Benaderingen voor *n*! voor grote waarden van *n*

[Dick Klingens]
oktober 2001

1. Een eerste methode

We zullen bewijzen:

Stelling Voor "grote" n geldt $n! \approx n^n \cdot e^{-n}$

We veronderstellen bekendheid met de limiet $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$. Op basis hiervan berekenen we:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$$

Stel nu $u_n = \frac{n!}{n^n}$. Dan is $u_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n!}{(n+1)^n}$, zodat $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \frac{1}{(1+1/n)^n}$.

We vinden:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{e} \tag{1.0}$$

We bewijzen nu eerst een limietstelling (de tweede?) van Cauchy .

Stelling *Is $u_n > 0$ en bestaat voor een rij $\{u_n\}$ de limiet $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$, dan bestaat ook $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$, waarbij*

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$$

Bewijs:

Zij $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = L$.

A.

We veronderstellen allereerst dat $L > 0$.

Bij iedere $e > 0$, waarvoor ook geldt dat $e < L$, kan een getal $P(e)$ zo worden bepaald, dat voor $p > P(e)$ voldaan is aan:

$$L - \tfrac{1}{2}e < \frac{u_{p+1}}{u_p} < L + \tfrac{1}{2}e$$

Passen we deze ongelijkheid toe voor $p = m, \ldots, p = n - 1$ en vermenigvuldigen we de ongelijkheden, dan vinden we:

$$(L-\tfrac{1}{2}e)^{n-m} < \frac{u_n}{u_m} < (L+\tfrac{1}{2}e)^{n-m} \tag{1.1}$$

of ook

$$(L-\tfrac{1}{2}e)\sqrt[n]{\frac{u_m}{(L-\frac{1}{2}e)^m}} < \sqrt[n]{u_n} < (L+\tfrac{1}{2}e)\sqrt[n]{\frac{u_m}{(L+\frac{1}{2}e)^m}} \tag{1.2}$$

Voor vaste m naderen de beide wortelvormen tot 1 als $n\to\infty$.

Verder vinden we uit $\frac{L-e}{L-\frac{1}{2}e} < \frac{L-e}{L-e} = 1$ en $\frac{L+e}{L+\frac{1}{2}e} > \frac{L+e}{L+e} = 1$, dat

$$\frac{L-e}{L-\frac{1}{2}e} < 1 < \frac{L+e}{L+\frac{1}{2}e}$$

Er is dus een getal N, zo dat voor $n > N$ voldaan is aan:

$$\sqrt[n]{\frac{u_m}{(L-\frac{1}{2}e)^m}} > \frac{L-e}{L-\frac{1}{2}e} \quad \text{en} \quad \sqrt[n]{\frac{u_m}{(L+\frac{1}{2}e)^m}} < \frac{L+e}{L+\frac{1}{2}e}$$

Nu volgt uit (1.2) dat

$$L-e < \sqrt[n]{u_n} < L+e$$

Met andere woorden: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = L$.

B.

Voor L verloopt het bewijs min of meer analoog.

Bij iedere $e > 0$ bestaat er een getal $P(e)$ zodat voor $p > P(e)$ geldt: $0 < \frac{u_{p+1}}{u_p} < \frac{1}{2}e$,

waaruit we kunnen afleiden dat $0 < \frac{u_n}{u_m} < (\frac{1}{2}e)^{n-m}$, en dan $0 < \sqrt[n]{u_n} < \frac{1}{2}e \sqrt[n]{\frac{u_m}{(\frac{1}{2}e)^m}}$.

Houden we ook nu m weer vast, dan bestaat er een getal N, zodat voor $n > N$ geldt: $\sqrt[n]{\frac{u_m}{(\frac{1}{2}e)^m}} < 2$,

en dus: $0 < \sqrt[n]{u_n} < e$, hetgeen wil zeggen, dat $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 0$

Conclusie.

In alle gevallen (A en B) geldt:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$ ♦

Volgens deze limietstelling van Cauchy volgt dan uit (1.0) direct:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

Uit deze laatste limiet vinden we voor "grote" waarden van n een redelijke benadering van n!:

$$n! \approx n^n \cdot e^{-n}$$

2. De formule van Sterling

We zullen bewijzen:

Stelling $n! = n^n e^{-n} \sqrt{2p\, n}\, e^{\frac{q}{12n}}$ $\qquad (0 < q < 1)$

formule van Sterling (James Sterling, 1692-1770)

Opmerking

De factor $e^{\frac{q}{12n}}$ ligt ligt tussen 0 en $e^{\frac{1}{12n}}$. Voor grote waarden van n ligt dit laatste getal dicht bij 1.

[einde Opmerking]

Bewijs:

We gaan uit van de reeksontwikkeling van de functie f gedefinieerd door $f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x}$.

Er geldt:

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x} = \frac{1}{2x+1} + \frac{1}{3(2x+1)^3} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)(2x+1)^{2n+1}} + R_{2n+1}(x) \qquad (2.1)$$

waarbij

$$\left|R_{2n+1}(x)\right| < \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{4x(x+1)(2x+1)^{2n+1}} \tag{2.2}$$

Als we in (2.1) het rechter lid afbreken na de eerste term (de term met n = 0), dan hebben we:

$$\tfrac{1}{2}\ln\frac{1+x}{x} = \frac{1}{2x+1} + \frac{q}{12x(x+1)(2x+1)} \qquad (0<q<1)$$

Deze uitdrukking kunnen we als volgt herleiden:

$$(x+\tfrac{1}{2})\ln(1+\frac{1}{x}) = 1 + \frac{q}{12x(x+1)}$$

$$\ln\frac{(1+1/x)^{x+\frac{1}{2}}}{e} = \frac{q}{12x(x+1)}$$

In de laatste uitdrukking kiezen we $x = n$ (waarbij n een natuurlijk getal is); we krijgen:

$$\frac{(1+1/n)^{n+\frac{1}{2}}}{e} = e^{\frac{q}{12n(n+1)}} \tag{2.3}$$

We beschouwen vervolgens de rij $\{u_n\}$ met algemene term

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} \tag{2.4}$$

Voor deze rij volgt uit (2.3):

$$\frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{(1+1/n)^{n+\frac{1}{2}}}{e} = e^{\frac{q}{12n(n+1)}} = e^{\frac{q}{12n}} \cdot e^{\frac{-q}{12(n+1)}}$$

zodat

$$u_n e^{\frac{-q}{12n}} = u_{n+1} e^{\frac{-q}{12(n+1)}} \tag{2.5}$$

Omdat nu $u_n e^{\frac{-q}{12n}} < u_{n+1} e^{\frac{-q}{12(n+1)}}$, hebben we $u_n > u_{n+1}$.

De rij $\{u_n\}$ is dus monotoon dalend en omdat de termen positief zijn hebben we te maken met een begrensde rij.

Zij L de limiet van de rij $\{u_n\}$.

We herschrijven vergelijking (2.5) nu enigszins (wijzigingen in de exponenten van de e-machten):

$$u_n e^{\frac{1-q}{12n}} \cdot e^{\frac{-1}{12n}} = u_{n+1} e^{\frac{1-q}{12(n+1)}} \cdot e^{\frac{-1}{12(n+1)}}$$

Omdat $e^{\frac{1-q}{12n}} > e^{\frac{1-q}{12(n+1)}}$, volgt nu:

$$u_n e^{\frac{-1}{12n}} < u_{n+1} e^{\frac{-1}{12(n+1)}} \tag{2.6}$$

en hieruit volgt dan weer dat de rij $\{u_n e^{\frac{-1}{12n}}\}$ monotoon stijgend is. De limiet van deze rij is eveneens gelijk aan de eerder geïntroduceerde waarde L, omdat $\lim\limits_{n\to\infty} e^{\frac{-1}{12n}} = 1$.

Uit (2.5) en (2.6) volgt nu: $u_n e^{\frac{-1}{12n}} < L < u_n$.

L verschilt dus van u_n met een vermenigvuldigingsfactor die ligt tussen 1 en $e^{\frac{-1}{12n}}$, zodat we kunnen schrijven:

$$L = u_n e^{\frac{-q}{12n}} \qquad (0<q<1)$$

of

$$u_n = L e^{\frac{q}{12n}} \qquad (0<q<1)$$

Wegens (2.4) vinden we dan

$$u_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = Le^{\frac{q}{12n}} \qquad (2.7)$$

zodat

$$\begin{aligned} n! &= Ln^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}e^{\frac{q}{12n}} \\ &= Ln^n e^{-n}\sqrt{n}\cdot e^{\frac{q}{12n}} \end{aligned} \qquad (2.8)$$

Hiermee hebben we de formule van Sterling gevonden, op de waarde van L na.

We zullen nu aantonen, dat $L = \sqrt{2p}$.

Uit (2.7) volgt:

$$u_n^2 = \frac{(n!)^2 e^{2n}}{n^{2n+1}} = L^2 e^{\frac{q}{6n}}$$

$$u_{2n} = \frac{(2n)!e^{2n}}{(2n)^{2n+\frac{1}{2}}} = Le^{\frac{q_1}{24n}}$$

Merk op, dat in de formule voor u_{2n} q_1 in het algemeen niet gelijk is aan q, immers q hangt van de waarde van n af.
Deling van de beide uitdrukkingen geeft nu:

$$\frac{u_n^2}{u_{2n}} = \frac{(n!)^2(2n)^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!n^{2n+1}} = \frac{(n!)^2 2^{2n+\frac{1}{2}}}{(2n)!n^{\frac{1}{2}}} = Le^{\frac{q}{6n}-\frac{q_1}{24n}} \qquad (2.9)$$

Het tweede lid van rechts van (2.9) werken we nu "gewoon" uit:

$$\begin{aligned} \frac{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2(2\cdot 2\cdot 2\cdots 2)^2\cdot 2^{\frac{1}{2}}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n-1)(2n)\cdot n^{\frac{1}{2}}} &= \frac{(2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n))^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(2n)}\cdot\frac{2^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots(2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}\cdot\frac{2^{\frac{1}{2}}}{n^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Kwadratering van (2.9) en de laatste uitdrukking hierboven geeft dan

$$L^2 e^{\frac{q}{3n}-\frac{q_1}{12n}} = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)(2n-1)}\cdot 4$$

Na limietovergang voor $n \to \infty$ hebben we dan

$$L^2 = 4\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdots(2n-2)(2n)}{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdots(2n-1)(2n-1)} \qquad (2.10)$$

De limiet in het rechter lid is het zogenoemde *produkt van Wallis* (John Wallis, 1616-1703).
Dat produkt kan worden berekend met behulp van goniometrische integralen.
Het resultaat van een dergelijke berekening (zie daarvoor paragraaf 3) is:

$$\tfrac{1}{2}p = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdots\frac{2n}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

Uitdrukking (2.10) gaat daardoor over in:

$$L^2 = 4\cdot\tfrac{1}{2}p\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n-1} = 2p$$

zodat

$$L = \sqrt{2p}$$

Volgens (2.8) is dan

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2p\,n}\cdot e^{\frac{q}{12n}} \qquad (0 < q < 1)$$ ♦

3. Het product van Wallis

We bewijzen allereerst:

Stelling $\int_0^{\frac12 p} \sin^n x \,\mathrm{d}\, x = \dfrac{n-1}{n} \int_0^{\frac12 p} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}\, x$

Bewijs:
Zij $F_n(x) = \int \sin^n x \,\mathrm{d}\, x$, dan volgt door middel van partiële integratie:

$$\begin{aligned}
F_n(x) &= \int \sin^n x \,\mathrm{d}\, x \\
&= -\int \sin^{n-1} x \,\mathrm{d}(\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + \int (n-1)\sin^{n-2} x \cos^2 x \,\mathrm{d}\, x \\
&= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)\int (\sin^{n-2} x - \sin^n x) \,\mathrm{d}\, x \\
&= -\sin^{n-1} x \cdot \cos x + (n-1)F_{n-2}(x) - (n-1)F_n(x)
\end{aligned}$$

zodat

$$F_n(x) = -\frac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} F_{n-2}(x) \qquad (n \neq 0)$$

Kiezen we nu als integratiegrenzen 0 en $\frac12 p$, dan is $\left[-\dfrac{\sin^{n-1} x \cdot \cos x}{n}\right]_0^{\frac12 p} = 0$, zodat

$$\int_0^{\frac12 p} \sin^n x \,\mathrm{d}\, x = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac12 p} \sin^{n-2} x \,\mathrm{d}\, x \qquad \blacklozenge$$

Uit deze stelling volgt door herhaalde toepassing voor een *even* exponent:

$$\int_0^{\frac12 p} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}\, x = \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \tag{3.1}$$

en voor een *oneven* exponent:

$$\int_0^{\frac12 p} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}\, x = \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-3}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 \tag{3.2}$$

Op het interval $\langle 0; \frac12 p \rangle$ is 0 < sin x < 1, zodat $\sin^{n+1} x < \sin^n x$. Hetgeen de volgende ongelijkheid oplevert:

$$\int_0^{\frac12 p} \sin^{2n+2} x \,\mathrm{d}\, x < \int_0^{\frac12 p} \sin^{2n+1} x \,\mathrm{d}\, x < \int_0^{\frac12 p} \sin^{2n} x \,\mathrm{d}\, x$$

Uit (3.1) en (3.2) volgt dan

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} < \frac{2n}{2n+1} \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 < \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdots \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{p}{2} \tag{3.3}$$

Het eerste en derde lid van deze ongelijkheid hebben de factor $\dfrac{2n-1}{2n} \cdots \dfrac{3}{4} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{p}{2}$ gemeenschappelijk.
Vermenigvuldigen we uitdrukking (3.3) nu met het omgekeerde van deze factor, dan volgt, na rangschikking van de factoren in het tweede lid:

$$\frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{p}{2} < \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} < \frac{p}{2} \tag{3.4}$$

En voor $n \to \infty$ volgt hieruit dan

$$\tfrac12 p = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \tag{3.5}$$