Nulpunten van een functie
in samenhang met de afgeleide van die functie

[Dick Klingens]
augustus 2000

1.

Definitie 1.1
Indien een functie f de nulpunten x_i (i = 1, 2, …, n) heeft, waarvan er k gelijk zijn, dan heten die nulpunten ***k*-voudig**.
Het getal k heet de **multipliciteit** van zo'n nulpunt.

Stelling 1.1
De multipliciteit k van een nulpunt $x_i = a$ van een functie f is gelijk aan de orde van de afgeleide uit de rij $f^{(1)}, f^{(2)}, \cdots$ die voor $x = a$ als eerste in die rij ongelijk aan 0 is.

Bewijs:
We gaan ervan uit dat de functie f minstens k maal differentieerbaar is. Volgens de hoofdstelling van de algebra geldt:

$$f(x) = (x-a)^k g(x) \qquad g(a) \neq 0$$

Nu is $f(a) = 0$, terwijl verder:

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x) &= k(x-a)^{k-1} g(x) + (x-a)^k g^{(1)}(x) \Rightarrow f^{(1)}(a) = 0 \\
f^{(2)}(x) &= k(k-1)(x-a)^{k-2} g(x) + k(x-a)^{k-1} g^{(1)}(x) + k(x-a)^{k-1} g^{(1)}(x) + (x-a)^k g^{(2)}(x) \\
&= k(k-1)(x-a)^{k-2} g(x) + 2k(x-a)^{k-1} g^{(1)}(x) + (x-a)^k g^{(2)}(x)
\end{aligned}$$

De functie $f^{(p)}$ is een som van (opvolgend) termen met factoren van de vorm

$$(x-a)^{k-p} g(x), (x-a)^{k-p+1} g^{(1)}(x), \ldots, (x-a)^k g^{(p)}(x)$$

waaruit volgt dat $f^{(p)}(a) = 0$ voor p = 1,2, …, $k - 1$.
Voor de k-de afgeleide van f vinden we dan

$$f^{(k)}(x) = k! \cdot g(x) + G(x)$$

waarin $G(x)$ een som is van (opvolgend) termen die alle een factor $x - a$ (of een veelvoud daarvan) hebben.
We hebben dus nu:

$$f^{(k)}(a) = k! \cdot g(a) \neq 0$$

waaruit het gestelde volgt. ♦

2.

Voordat we de stelling formuleren, geven we een voorbeeld.
Zij

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 - 5x^2 + 7x - 3 \\
&= (x-3)(x^2 - 2x + 1) \\
&= (x-1)^2 (x-3)
\end{aligned}$$

De nulpunten zijn dus 1, 1, 3.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 3x^2 - 10x + 7 \\
&= (x-1)(3x-7)
\end{aligned}$$

De nulpunten van f ' zijn 1, $2^1/_3$.
Het rekenkundig gemiddelde van de nulpunten van f (rekening houdend met de multipliciteit) is:

$$\frac{1+1+2}{3}=\frac{5}{3}$$

Het rekenkundig gemiddelde van de nulpunten van $f\,'$ is:

$$\frac{1+2\tfrac{1}{3}}{2}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$$

We trekken nu elk nulpunt van $f\,'$ af van elk nulpunt van f ; we krijgen dan 6 verschillen:

$$0, 0, 2, -1\tfrac{1}{3}, -1\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}$$

Sommatie daarvan geeft:

$$0+0+2-1\tfrac{1}{3}-1\tfrac{1}{3}+\tfrac{2}{3}=0$$

Algemeen geldt nu:

Stelling 2.1
A. Het rekenkundig gemiddelde van de nulpunten van een gehele rationale functie van de graad n $(n \geq 2)$ is gelijk aan dat van de nulpunten van zijn afgeleide (met inachtneming van de multipliciteit).
B. De som van de verschillen van de nulpunten van een gehele rationale functie van de graad n $(n \geq 2)$ en de nulpunten van de afgeleide van die functie is gelijk aan 0 (met inachtneming van de multipliciteit).

Bewijs:
Zij f een gehele rationale functie van de graad n $(n \geq 2)$ gedefinieerd door

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

Stel x_i (i = 1, 2, …, n) zijn de nulpunten van deze functie.

De afgeleide $f\,'$ van f is dan vastgelegd door

$$f\,'(x)=na_0x^{n-1}+(n-1)a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-1} \qquad (a_0 \neq 0)$$

Stel t_i (i = 1, 2, …, n - 1) zijn de nulpunten van $f\,'$.
Volgens de hoofdstelling van de algebra hebben we:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n) \\ &= a_o(x^n-(x_1+x_2+\cdots x_n)x^{n-1}+\cdots+(-1)^n x_1x_2\cdots x_n) \end{aligned}$$

zodat

$$-a_0(x_1+x_2+\cdots x_n)=a_1 \Rightarrow x_1+x_2+\cdots x_n=-\frac{a_1}{a_0}$$

Ook is dan:

$$\begin{aligned} f\,'(x) &= na_0(x-t_1)(x-t_2)\cdots(x-t_{n-1}) \\ &= na_0(x^{n-1}-(t_1+t_2+\cdots+t_{n-1})x^{n-2}+\cdots(-1)^{n-1}t_1t_2\cdots t_{n-1}) \end{aligned}$$

zodat

$$-na_0(t_1+t_2+\cdots+t_{n-1})=(n-1)a_1 \Rightarrow t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}=-\frac{(n-1)a_1}{na_0}$$

Voor de bedoelde rekenkundige gemiddelden hebben we:

$$\frac{x_1+x_2+\cdots x_n}{n}=-\frac{a_1}{na_0}$$

$$\frac{t_1+t_2+\cdots+t_{n-1}}{n-1}=-\frac{(n-1)a_1}{(n-1)na_0}=-\frac{a_1}{na_0}$$

waaruit het gestelde onder A onmiddellijk duidelijk is. ♦

Sommeren van de $n(n-1)$ verschillen $x_i - t_k$ geeft:

$$\sum_{i,k=1}^{n,n-1}(x_i-t_k)=(n-1)\sum_{i=1}^{n}x_i-n\sum_{k=1}^{n-1}t_k=-(n-1)\frac{a_1}{a_0}+n\frac{(n-1)a_1}{na_0}$$
$$=-(n-1)\frac{a_1}{a_0}+(n-1)\frac{a_1}{a_0}$$
$$=0$$

waaruit het gestelde onder B blijkt. ♦

3.

We veronderstellen nu dat de gehele rationale *f* *geen* meervoudige nulpunten x_i $(i=1,2,\cdots,n)$ heeft.
Met andere woorden:

$$x_i\neq x_j\qquad (i,j=1,2,\ldots,n;\, i\neq j)$$

We weten (volgens de hoofdstelling van de algebra):
$f(x)=a_0(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)$
Differentiëren geeft dan:

$$f'(x)=a_0[(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)+\ldots+(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})]$$
$$=\frac{f(x)}{x-x_1}+\frac{f(x)}{x-x_2}+\ldots+\frac{f(x)}{x-x_n}$$
$$=f(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}$$

We bewijzen nu:

> **Stelling 3.1**
> Een gehele rationale functie *f* met enkelvoudige nulpunten en diens afgeleide *f '* hebben geen gemeenschappelijke nulpunten.

Bewijs:
Stel x_i = *a* is een nulpunt van *f*.
Volgens de hoofdstelling van de algebra is dan

$$f(x)=(x-a)g(x),\text{ met } g(a)\neq 0$$

Nu is:

$$f'(x)=g(x)+(x-a)g'(x)\Rightarrow f'(a)=g(a)\neq 0$$

x_i = *a* is dus geen nulpunt van *f '*.
Daar het aantal nulpunten van *f '* gelijk is aan *n* – 1, is het gestelde dus juist. ♦

Ook geldt:

> **Stelling 3.2**
> Zijn x_i (*i* = 1, …, *n*) en t_k (*k* = 1, …, *n* – 1) nulpunten van opvolgend *f* (geheel rationaal) en *f '*, waarbij de nulpunten van *f* enkelvoudig zijn, dan geldt dat de som van de omgekeerden van de *n*(*n* – 1) verschillen (x_i – t_k) gelijk is aan 0.

Bewijs:

Hierboven hebben we laten zien, dat $f'(x)=f(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}$

Uit Stelling 3.1 volgt nu dat:
Als t_k een nulpunt is van *f '*, dan is $f(t_k)\neq 0$, immers *f* en *f '* hebben geen nulpunten gemeenschappelijk.
Uit $f'(t_k)=0$ volgt dan

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{t_k - x_i}$$

of

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - t_k} = 0$$

zodat ook

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i - t_k} = 0$$

♦