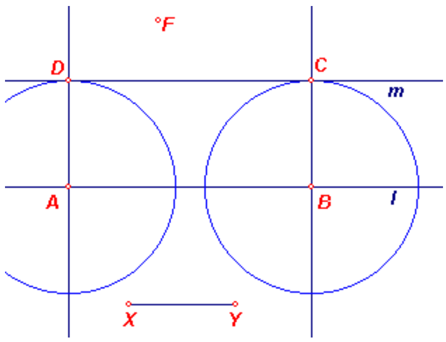
Cabri-werkblad

Enkele meetkundige eigenschappen van de parabool

N.B.
In het onderstaande betekent
$d(P, x)$: de (loodrechte) afstand van het punt P tot de lijn x;
(A, XY) : de cirkel met middelpunt A en straal gelijk aan $|XY|$;
collineair : (gezegd van punten) liggend op eenzelfde rechte lijn.

Opdracht 1



Kies op een lijn l de punten A en B en construeer in beide punten de loodlijn op l.
Teken ook een lijnstuk XY (zie bovenstaande figuur).
Construeer nu de cirkels (A, XY) en (B, XY). Gebruik daarbij de functie 'Passer'.
Bepaal vervolgens de snijpunten D en C (liggend aan dezelfde kant van l) van beide cirkels met die loodlijnen en teken de lijn $CD \equiv m$.

🗎 Wat voor soort figuur is nu $ABCD$? Geef een korte toelichting.

Kies nu een punt S op m.

🗎 Waaraan is $d(S, l)$ gelijk? Geldt dat voor elk punt S van m? Verklaar je antwoorden (geef een bewijs).

Opdracht 2

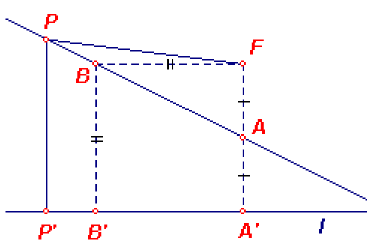
Teken in de figuur van Opdracht 1 een punt F.
Construeer ook de meetkundige plaats K van de punten die op een afstand $|XY|$ van F liggen (maak daarbij ***geen*** gebruik van de Cabri-functie 'MeetkundigePlaats').
Verplaats het punt F (eventueel) zo, dat de lijn m en K elkaar snijden.

🗎 Wat weet je nu van een snijpunt P van m en K in relatie tot de lijn m en het punt F?
Formuleer dit zo mogelijk met een formule.

Maak vervolgens het lijnstuk XY groter en kleiner.

🗎 Beschrijf je bevindingen met betrekking tot het punt P. (Bijvoorbeeld: beweegt P zich dan over een rechte lijn?)

Opdracht 3



In de figuur zijn A en B punten waarvoor geldt: $d(A, l) = AF$ en $d(B, l) = BF$.
Daarbij is ook $BF \perp AF$, terwijl A, A', F collineair zijn.
De punten A', B' zijn de voetpunten van de loodlijnen uit A en B op l.
Op de lijn AB ligt een (willekeurig) punt P.

Kies een nieuw werkblad en onderzoek met Cabri (gebruik daarbij de functie 'Afstand/Lengte') of er posities zijn van het punt P op de lijn AB waarvoor $d(P, l) = PF$.

Geef je bevindingen kort weer.

Opdracht 4

Bewijs dat voor een punt P op de lijn AB, niet-samenvallend met A of B, geldt: $d(P, l) \neq PF$.

Aanwijzing

Verleng het lijnstuk FB met een lijnstuk BC, waarbij C op PP' ligt. Stel de lengte van de zijde van het vierkant gelijk aan $2a$ en stel $BC = 2x$. Druk PC dan uit in x en pas in driehoek PCF de stelling van Pythagoras toe. Voor welke waarde(n) van x is dan $PF = PP'$?

Opdracht 5

Teken op een nieuw werkblad een lijn l en een punt F.
Kies een willekeurig punt P' op l en construeer met behulp daarvan een punt P waarvoor geldt: $d(P, l) = PF$.

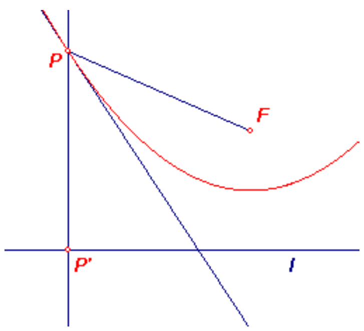
Beschrijf kort hoe je het punt P geconstrueerd hebt.

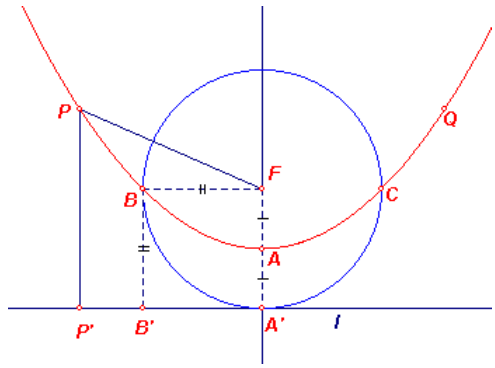
Aanwijzing

Als $PP' = PF$ (en dat is zo; waarom?), wat weet je dan van de ligging van het punt P?

Opdracht 6

Construeer nu in de figuur van Opdracht 5 de meetkundige plaats van het punt P, als P' de lijn l doorloopt. Kies daarvoor de functie 'MeetkundigePlaats', selecteer eerst het zojuist geconstrueerde punt P en selecteer dan het punt P'.





Als het goed is, krijg je dan een figuur als bovenstaand (links). De meetkundige plaats heet **parabool**. Het punt F heet **brandpunt** van de parabool. De lijn l is de zogenoemde **richtlijn** van de parabool.
In de rechter figuur zijn de punten A en B van Opdracht 3 ook weergegeven. Ga na, dat A en B ook op de meetkundige plaats liggen.

Opdracht 7

In de figuur van Opdracht 6 (rechts) is ook de loodlijn door F op de lijn l getekend. Deze lijn heet **parabool-as**, of kortweg **as**.
Het punt A (midden tussen F en l) heet de **top** van de parabool.
Het punt Q is het spiegelbeeld van P in de as. Het punt C is het spiegelbeeld van B in de as.

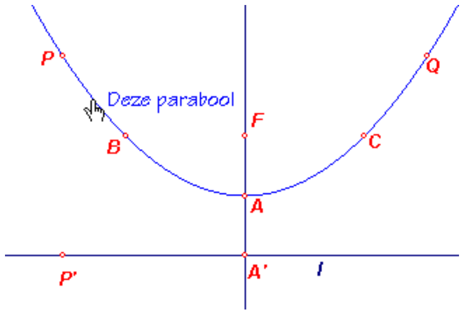
Waarom liggen Q en C ook op de parabool? Geef het antwoord op deze vraag in de vorm van een bewijs.

Opdracht 8

Neem nu weer een leeg werkblad en teken daarop het punt F en de lijn l.
Construeer allereerst de punten A, B en C.
Aanwijzing – Merk op, dat $FA' = FB$. Je kan dus een cirkel gebruiken.

Kies vervolgens weer een willekeurig punt P' op l en construeer uitgaande van P' het punt P (zie Opdracht 5) en daarna het punt Q.
Je hebt dan 5 punten van de parabool getekend.
We kunnen nu door deze 5 punten een parabool tekenen met de functie 'Kegelsnede'.

Kies deze functie en selecteer achtereenvolgens *A*, *B*, *C*, *P*, *Q*.
De parabool wordt dan getekend (zie onderstaande figuur).



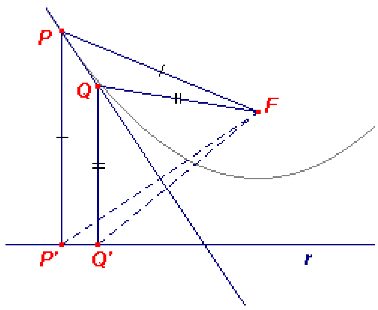
N.B. Elke kegelsnede, en een parabool behoort tot de familie van de kegelsneden, is bepaald door 5 punten.

Opdracht 9 – Een macro

Op basis van hetgeen gevonden is in Opdracht 8 kunnen we nu de constructie van de parabool, uitgaande van het punt *F* en de lijn *l*, vastleggen in een macro.
Verberg allereerst de punten *A*, *B*, *C*, *P*, *Q*.
Kies dan de functie 'Beginobjecten' in het *Macro-menu* (het vijfde menu van rechts) en selecteer *F* en *l*.
Kies vervolgens de functie 'Eindobjecten' en selecteer de parabool.
Met de functie 'Definieer macro' leggen we de macro vast.
Geef de macro de naam 'Parabool' (*Naam van de constructie*) en vink het vakje vóór de tekst *Opslaan in bestand* aan. Druk daarna op de knop OK.
Ga na, dat in het *Macro-menu* nu de naam van de constructie (Parabool) is opgenomen.

Ter controle
Wis alle objecten van je werkblad, met uitzondering van het punt *F* en de lijn *l*.
Kies in het *Macro-menu* de functie 'Parabool' en selecteer *F* en *l*.
Als het goed is, wordt de parabool direct getekend. Kies daarna de functie 'Verberg/Toon' en ga na dat er vijf 'verborgen' punten op de parabool liggen (waaronder de eerder gebruikte punten *A*, *B* en *C*).
Ga door verplaatsing van het punt *F* na hoe de vorm van de parabool verandert.

Opdracht 10 – Raaklijn



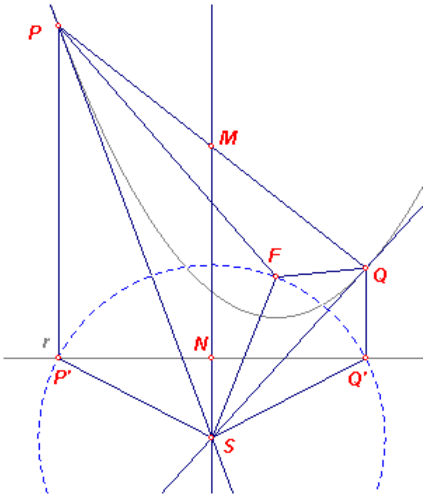
Bekijk bovenstaande figuur. Daarin is *P* een willekeurig punt van de parabool (die bepaald is door het punt *F* en de lijn *r*).
P' is de projectie van *P* op de richtlijn *r*. Ook is de middelloodlijn van *P'F* getekend.
De vraag is nu of die middelloodlijn (die uiteraard door *P* gaat; waarom?) nog een tweede snijpunt *Q* (van *P* verschillend) met de parabool kan hebben.
Laten we daarvan (dat er twee snijpunten zijn) nu eens uitgaan. Daaruit kun je dan een tegenstrijdigheid afleiden. Zo'n afleiding heet wel *bewijs uit het ongerijmde*.
🖹 Probeer een dergelijk bewijs op basis van het vorenstaande te leveren.

Een gevolg van dit bewijs is nu, dat de middelloodlijn van *P'F* **raaklijn** is in *P* aan de parabool.

Opdracht 11 – De eerste meetkundige eigenschappen

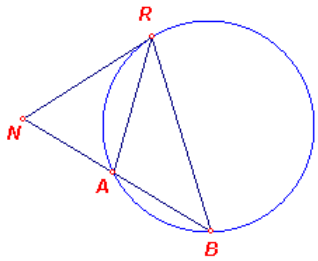
Kies twee willekeurige punten P en Q op een parabool (bepaald door F en r) en construeer de raaklijnen in P, Q aan de parabool.
Deze raaklijnen snijden elkaar in het punt S.

- Toon aan, dat $SP' = SQ' = SF$.
  Aanwijzing – Gebruik congruentie van driehoeken.



- Waarom liggen de punten P', Q', F op een cirkel met middelpunt S?
- Bewijs dat de loodlijn uit S op de richtlijn door het midden N van $P'Q'$ gaat.
- Bewijs ook dat de lijn SN door het midden M van PQ gaat.

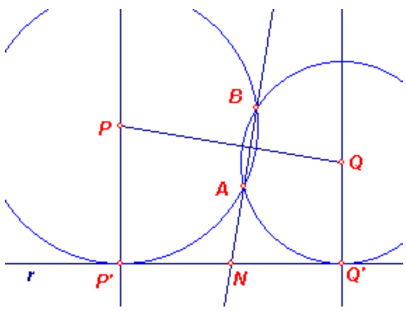
Opdracht 12 – Intermezzo



In bovenstaande figuur raakt de lijn NR in R aan de cirkel. De punten A en B liggen willekeurig op die cirkel, maar wel zo, dat N, A, B collineair zijn.

- Toon dat $NR^2 = NA \cdot NB$.
  Aanwijzing
  Bewijs eerst dat de hoeken ARN en NBR gelijk zijn (stelling van de omtrekshoek). Toon dan de gelijkvormigheid van de driehoeken NAR en NRB aan.

We kunnen hetgeen we zojuist gevonden hebben, gebruiken bij *twee* cirkels die een *gemeenschappelijke* raaklijn hebben.

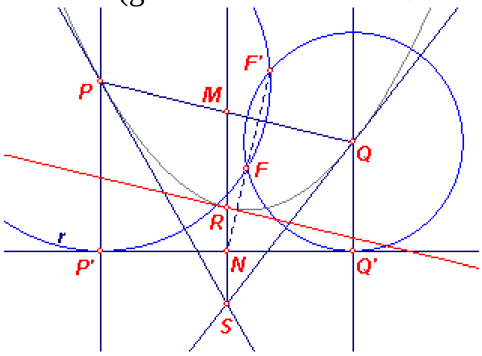


In deze figuur is de lijn r de gemeenschappelijke raaklijn aan de cirkels (P, PP') en (Q, QQ'), die elkaar snijden in de punten A en B.

- Toon aan, dat de lijn *AB* de lijn *r* snijdt in het midden *N* van *P'Q'* .
  Aanwijzing – Gebruik hetgeen bij het eerste onderdeel van deze opdracht vermeld is.
- Toon ook aan dat *PQ* loodrecht staat op *AB*.

Opdracht 13 – Nog een meetkundige eigenschap van de parabool

We gaan nu weer terug naar de parabool met raaklijnen in de punten *P* en *Q*, die elkaar snijden in het punt *S*.
Maak onderstaande tekening eventueel zelf (gebruik dan de macro:Parabool).



- Waarom gaan de cirkels (*P*, *PP'*) en (*Q*, *QQ'*) door het punt *F*?

De beide cirkels snijden elkaar ook nog in het punt *F'*.

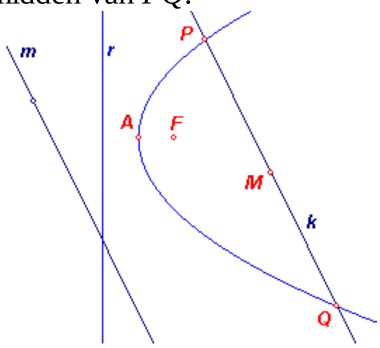
- Welke eigenschap heeft nu het snijpunt *N* van *FF'* met de lijn *r*. Geef in je antwoord aan waarop je dat baseert.

R is het snijpunt van *SN* met de parabool.

- Waarom staat de raaklijn in *R* aan de parabool loodrecht op *FF'*?
- Toon nu aan, dat de raaklijn in *R* aan de parabool evenwijdig is met *PQ*.

Opdracht 14 – Tot slot

Teken op een nieuw werkblad een parabool, gebaseerd op een punt *F* en een lijn *r*.
Teken ook een willekeurige lijn *m* (zie onderstaande figuur).
Kies nu een punt *P* op de parabool en construeer de lijn *k* door *P* evenwijdig met *m*. De lijn *k* snijdt de parabool ook in een punt *Q*. *M* is het midden van *PQ*.



Construeer nu (met de Cabri-functie 'MeetkundigePlaats') de meetkundige plaats van het punt *M* als het punt *P* de parabool doorloopt.

- Bewijs dat deze meetkundige plaats een rechte lijn is.
  Aanwijzing
  Je kunt bij dat bewijs natuurlijk gebruik maken van de eigenschappen die je in de andere opdrachten hebt gevonden. Geef duidelijk aan welke eigenschappen dat zijn.
- Waarom is die rechte lijn evenwijdig met de as van de parabool?
- Geef een beschrijving van de constructie van de raaklijn aan de parabool die evenwijdig is met de lijn *m*, ***zonder*** dat je van de eerder in deze Opdracht gevonden meetkundige plaats gebruik hoeft te maken.