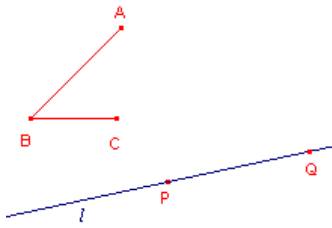


Cabri-werkblad

Parallel en antiparallel

Opdracht 1 - Probleem

figuur 1



In figuur 1 bepalen de punten A, B en C een hoek.

Zoals in die figuur getekend is de hoek ABC *positief georiënteerd* ('lopen' van A, via B naar C gaat in *positieve draairichting*, linksom, tegen de wijzers van de klok in), terwijl hoek CBA *negatief georiënteerd* is.

Er is ook een lijn l door het punt P getekend. Het punt Q ligt eveneens op l .

- a. Hoeveel hoeken met P als hoekpunt zijn er die gelijk zijn aan hoek ABC en die l als been hebben?
Maak op je antwoordblad een duidelijke schets.

We willen nu, met P als hoekpunt en l als been, een hoek **construeren** die gelijk is aan hoek ABC, maar *met dezelfde oriëntatie* als hoek ABC.

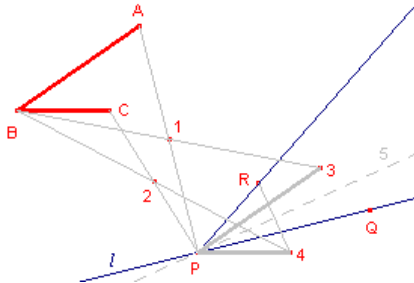
- b. Hoeveel van dergelijke hoeken zijn er? Maak opnieuw een duidelijke schets.

Tenslotte.

- c. Hoeveel hoeken met dezelfde oriëntatie als hoek ABC en met P als hoekpunt zijn er die PQ als been hebben?

Opdracht 2 - Constructie

figuur 2



In figuur 2 is met Cabri een constructie uitgevoerd, gebaseerd op figuur 1 en op Opdracht 1c.

De beschrijving van die constructie staat hieronder.

- 1 = Midden(A, P)
- 2 = Midden(C, P)
- 3 = Puntspiegeling(B, 1)
- 4 = Puntspiegeling(B, 2)
- 5 = Deellijn(3, P, Q)
- R = Spiegeling(4, 5)
- PR = HalveLijn(P, R)

De functies van Cabri zijn hier aangegeven als Functie(X,Y), waarbij eerst het object X en daarna het object Y geselecteerd moet worden.

Toon aan, dat hoek ABC gelijk is aan hoek RPQ.

Aanwijzing

Bekijk de in figuur 2 dik getekende lijnstukken (AB, BC, P3, P4).

Opdracht 3 - Een macro

- a. Maak een **macro:HoekNaarPunt** voor de constructie uit Opdracht 2, met
- Beginobjecten: C, B, A (de volgorde is belangrijk!), Q, P (ook hier is de volgorde belangrijk).
 - Eindobjecten: PR ("Deze halve lijn").

» Bewaar de in Opdracht 3a gedefinieerde macro in een bestand in verband met een hierna volgende opdracht.

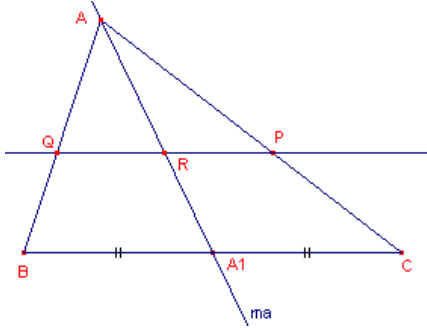
- b. Leg *kort* uit waarom de volgorde C, B, A én de volgorde Q, P belangrijk is.

Opmerking

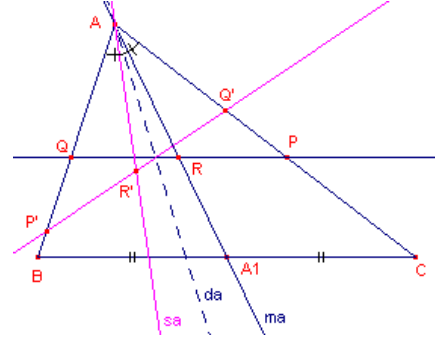
Er is een standaard macro (CopyAngle, KopieHoek) bij Cabri beschikbaar die ongeveer hetzelfde doet als de hierboven beschreven macro.

Opdracht 4 – Antiparallel

figuur 3a



figuur 3b



Teken een driehoek ABC met een punt P op de zijde AC (maak hierbij *geen* gebruik van de functie “Driehoek” in het *Teken*-menu; gebruik dus “Lijnstuk”-ken als zijden).

Teken ook de lijn door P evenwijdig met BC (Q op AB) en de zwaartelijn AA_1 (zie figuur 3a).

- a. Toon aan dat deze zwaartelijn (m_a) het lijnstuk PQ in twee gelijk stukken (PR en QR) deelt.

Teken nu ook de deellijn (bissectrice) d_a van hoek A (zie figuur 3b).

Spiegel de lijnen PQ en AA_1 in d_a (met de functie “Spiegeling” in het *Afbeeldingen*-menu).

- b. Toon nu aan dat het beeld $P'Q'$ van PQ in twee gelijke stukken verdeeld wordt door de lijn s_a , die het spiegelbeeld is van m_a (in de spiegelas d_a).
- c. Toon ook aan dat hoek $P'Q'A$ gelijk is aan hoek ABC.

Afspraken

Omdat PQ **parallel** (evenwijdig) is met BC, noemt men de lijn $P'Q'$ **antiparallel** met BC.

Het beeld van een zwaartelijn (ook wel **mediaan** genoemd) bij spiegeling in de bissectrice naar dezelfde zijde, noemt men een **symmediaan** van die zijde.

De resultaten van Opdracht 4 kunnen we nu (kort) formuleren als:

Een parallel van een driehoek wordt in twee gelijke stukken gedeeld door een mediaan

en

een antiparallel van een driehoek wordt in twee gelijke stukken gedeeld door een symmediaan.

Opdracht 5 - Voetpuntdriehoek

Om een antiparallel van een zijde van een driehoek te tekenen hebben we de (toch wat gecompliceerde) constructie van Opdracht 4 niet nodig. We kunnen daarvoor immers de macro:HoekNaarPunt uit Opdracht 3 gebruiken.

- a. Teken een driehoek ABC (weer met “Lijnstuk”-ken als zijden) en een punt P op de zijde AC.

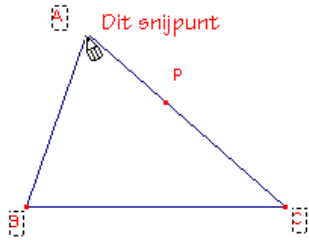
We willen de antiparallel van BC door P construeren.

- b. Voer nu de macro:HoekNaarPunt uit. Selecteer daartoe achtereenvolgens C, B, A, ...

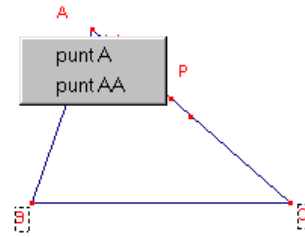
Je zou bij het uitvoeren van de macro in Opdracht 5b opnieuw A moeten selecteren (en daarna P). Maar Cabri staat twee keer selecteren van hetzelfde punt *niet* toe!

Je kan dat zien als je de cursor in de buurt van het punt A brengt. Je zou moeten krijgen “Dit punt”, maar je ziet “Dit snijpunt” (zie figuur 4a). Als je toch klikt, gebeurt zeker er niet wat je wilt dat er gebeurt.

figuur 4a



figuur 4b



Je kan deze “onvolkomenheid” van Cabri echter omzeilen.

Construeer op de plaats van A nog een tweede punt (zie het punt met de naam AA in figuur 4b)!!

- c. Beschrijf *kort* hoe je dat kan doen.

Aanwijzing

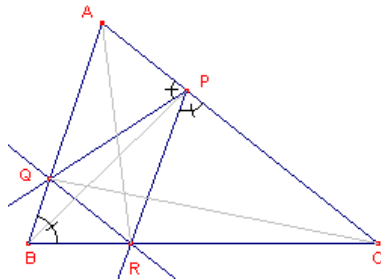
Er zijn meerdere mogelijkheden.

Gebruik daartoe bijvoorbeeld het punt C (in figuur 4b staat ook bijzonder punt op de zijde AC).

Teken (construeer met de macro:HoekNaarPunt) ook de lijn door P die antiparallel is met AB (denk daarbij aan de volgorde waarin je de punten moet selecteren!).

Geef P nu, indien nodig, een zodanige positie op AC, dat je de punten Q op AB en R op BC kan bepalen (zie figuur 5).

figuur 5



Teken ook de lijn QR.

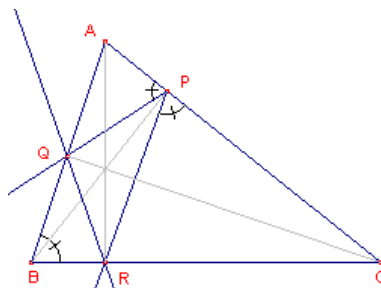
- d. Toon aan, dat de lijn QR antiparallel is met AC.
Wat weet je nu van de driehoeken APQ, RBQ, RPC en ABC?

Teken ook de lijnstukken AR, BP en CQ.

Verplaats P nu zó, dat deze lijnen door één punt gaan.

- e. Welke lijnen zijn AR, BP en CQ in dit geval van driehoek ABC?

figuur 6



- f. Toon aan dat in dit geval (bij de ligging van P, als bedoeld in vraag c) hoek $ARP = ARQ$.
Welke lijnen zijn AR, BP en CQ dus van driehoek PQR?

Afspraak

Driehoek PQR heet de **voetpuntdriehoek** van driehoek ABC (de punten P, Q, R zijn de voetpunten van de hoogtelijnen van driehoek ABC).

Opdracht 6 - ??(?)

Formuleer twee stellingen (een derde mag ook!) over de voetpuntdriehoek van een driehoek.

Opdracht 7 - Terug naar de symmedianen

Kies een nieuw Cabri tekenblad.

Teken daarop maar weer een driehoek ABC en ook de symmedianen van die driehoek.

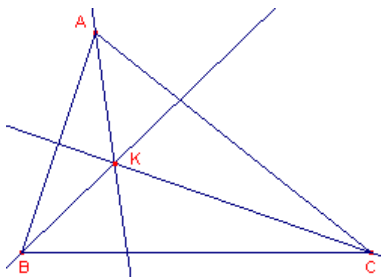
Hoe je een symmediaan kan construeren staat beschreven in Opdracht 4, maar ook hier is een macro misschien wel op zijn plaats.

- a. Waarom gaan de drie symmedianen door één punt (zie figuur 7a)?

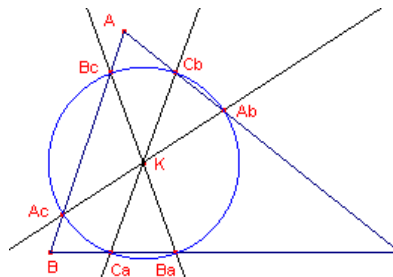
Aanwijzing

Ga na wat er met de lijnen aan de hand is die “originelen” zijn van die symmedianen.

figuur 7a



figuur 7b



Teken nu door dat snijpunt, noem het K, de drie lijnen die **antiparallel** zijn met de zijden van de driehoek (zie figuur 7b, waarin de symmedianen zijn weggelaten).

Aanwijzing

Kijk eens in figuur 6. Daarin staan in ieder geval ook drie antiparallellen.

- b. Toon nu aan dat de zes snijpunten van deze lijnen met de zijden van de driehoek op een cirkel liggen.

Aanwijzingen

- Wat weet je van het punt K?
- De letters bij de snijpunten duiden wellicht ook wel ergens op.

Opdracht 8 - Met een uitdagend slot

Ga weer uit van het **symmediaanpunt** K (ook wel het **punt van Lemoine** genoemd; naar *Emile Lemoine*, 1840-1912, Frankrijk).

figuur 8



Teken nu de drie lijnen door K die **parallel** zijn met de zijden van de driehoek.

Ook nu liggen de zes snijpunten van die lijnen met de zijden van de driehoek op een cirkel.

Een uitdaging?

Construeer het middelpunt van de cirkel.

Probeer te bewijzen, dat B_cC_b , A_cC_a en A_bB_a (in figuur 8 zijn ze *niet* getekend) antiparallel zijn met de zijden van de driehoek.

Probeer dan ook het bewijs te leveren van het feit dat de zes punten op een cirkel liggen, en zeg ook iets over de plaats van het middelpunt van die cirkel.

Opmerking

De cirkel uit Opdracht 7 heet **tweede cirkel van Lemoine**; die uit Opdracht 8 heet **eerste cirkel van Lemoine**.