

Probleem van Poncelet-Brianchon

1. Formulering van het probleem

Bepaal de meetkundige plaats van de hoogtepunten van de driehoeken die kunnen worden beschreven in een orthogonale hyperbool.

Dit probleem is voor het eerst geformuleerd door **Jean Victor Poncelet** (1788-1867, Frankrijk) en **Charles Julien Brianchon** (1785-1864, Frankrijk).

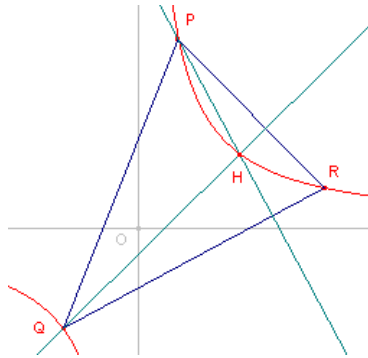
2. Oplossing van het probleem

We kiezen na schaling de orthogonale hyperbool met vergelijking

$$xy = 1$$

Zij nu PQR een willekeurige driehoek die beschreven is in de hyperbool; dwz. PQR is een driehoek waarvan de hoekpunten op de hyperbool liggen.

figuur 1



Stel de x -coördinaten van de punten P, Q, R zijn opvolgend a, b, c .

De y -coördinaten zijn dan (in dezelfde volgorde)

$$A = \frac{1}{a}, \quad B = \frac{1}{b}, \quad C = \frac{1}{c}$$

De richtingscoëfficiënt van de zijde QR is dan $\frac{B-C}{b-c}$, of als we B en C

vervangen:

$$\frac{\frac{1}{b} - \frac{1}{c}}{b-c} = -\frac{1}{bc}$$

De richtingscoëfficiënt van de hoogtelijn op QR is dan bc .

Op basis hiervan is een vergelijking van deze hoogtelijn:

$$y - A = bc(x - a)$$

Of verder uitgewerkt:

$$y + abc = bcx + A$$

$$y + abc = bc\left(x + \frac{A}{bc}\right)$$

$$y + abc = bc(x + ABC) \dots\dots(1)$$

Op eenvoudige manier is uit (1) de vergelijking van de hoogtelijn op PR af te leiden:

$$y + abc = ac(x + ABC) \dots\dots(2)$$

De coördinaten van het hoogtepunt H (we stellen ze x' en y') voldoen nu aan de vergelijkingen (1) en (2).

Gelijkstelling van de rechter leden geeft dan eenvoudig voor de x -coördinaat van H:

$$x' = -ABC \quad \dots\dots(3)$$

Voor de y -coördinaat geldt dan:

$$y' = -abc \quad \dots\dots(4)$$

Vermenigvuldiging van (3) en (4) geeft dan

$$x'y' = 1$$

De coördinaten van het punt H voldoen dus aan de vergelijking

$$xy = 1$$

Met andere woorden:

De meetkundige plaats van de hoogtepunten van driehoeken die ingeschreven zijn in een orthogonale hyperbool, is de orthogonale hyperbool zelf. ♦

Opmerking

Een eerste oplossing van het probleem komt voor in

Annales de Gergonne, vol. XI, 1820-1821

Dit is een in 1810 door **Joseph Diaz Gergonne** (1771-1859, Frankrijk) gestart wiskundig tijdschrift.

[einde Opmerking]