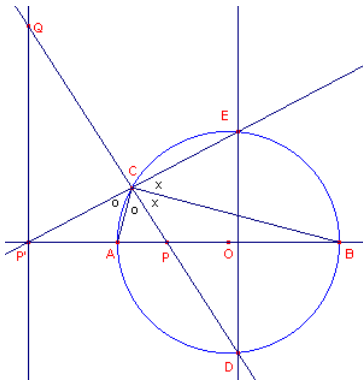


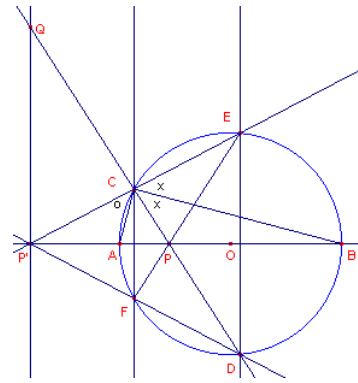
Pool en poollijn

1. Inleiding met inversie

figuur 1a



figuur 1b



We kiezen een punt P binnen een cirkel (met straal r) en bepalen de inverse P' van P ten opzichte van deze cirkel (zie figuur 1a).

Dan is

$$OP \times OP' = r^2 \text{ (definitie van inversie)}$$

Voor de dubbelverhouding op de lijn PP' die de cirkel in A en B snijdt, hebben we dan:

$$(ABPP') = -\frac{PA}{PB} : \frac{P'A}{P'B} = -\frac{r-k}{r+k} : \frac{\frac{r^2}{k} - r}{\frac{r^2}{k} + r} = -\frac{r-k}{r+k} : \frac{r-k}{r+k} = -1$$

waar $OP = k$, zodat $OP' = r^2 / k$.

We bekijken nu de punten Q van de lijn p die in P' loodrecht staat op AB .

We zullen aantonen, dat ook P en Q harmonisch (gescheiden) liggen ten opzichte van de punten A en B .

De lijnenbundel met top C geeft nu (op grond van de definitie): $C(ABPP') = -1$, waarbij $CA \perp CB$ (immers C ligt op een Thales-cirkel met middellijn AB).

De lijnen CA en CB zijn dan bissectrices van PCP' en PCE .

Hieruit volgt dat $bg AD = bg AC$; dus $AB \perp DE$. Zie nu verder figuur 1b.

Op dezelfde manier kunnen we laten zien, dat $CF \perp AB$.

Bekijken we nu de volledige vierzijde $CEDF$. P' is hiervan een hoekpunt. Het overstaande hoekpunt van P' is het snijpunt van CF en ED (dit is het oneigenlijke punt van de lijn p).

p is dus diagonaal van de volledige vierzijde.

Volgens de symmetrie in AB gaat de diagonaal EF dus eveneens door het punt P .

En dan hebben we $(CDPQ) = -1$.

We hebben nu bewezen:

Stelling 1a

De meetkundige plaats van de punten Q met $(ABPQ) = -1$ waarbij A en B snijpunten zijn van de lijn door P en Q met een cirkel met middelpunt O is een rechte lijn die loodrecht staat op OP (met P binnen de cirkel).

Vraag: Wat nu als P buiten de cirkel ligt?

Het bovenstaande bewijs verloopt dan analoog, mits we het punt Q (op p) maar binnen de cirkel kiezen.

Immers, het bewijs is gebaseerd op de snijpunten C en D van de lijn p en de cirkel.

Het geval dat Q buiten de cirkel ligt, laten we op dit moment voor wat het is. We komen daarop terug in paragraaf 2.

Vooruitlopend daarop geven we een definitie.

Definitie

De lijn p heet de **poollijn** van P ten opzichte van de cirkel.

Het punt P heet de **pool** van de lijn p ten opzichte van de cirkel.

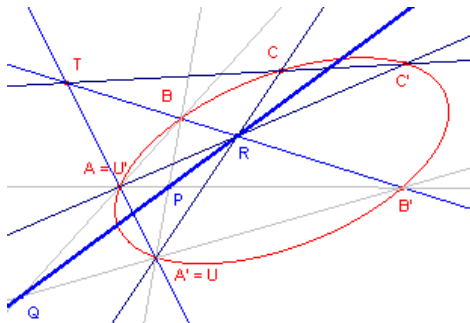
We kunnen stelling 1a dus herformuleren als

Stelling 1b

De meetkundige plaats van de punten die met een punt P harmonisch liggen met de snijpunten van een lijn door P en een cirkel, is de poollijn van P ten opzichte van die cirkel.

2. Involutie op een kegelsnede

figuur 2a



We bekijken een lijnenbundel met top T . Deze lijnenbundel laten we een involutie insnijden op een kegelsnede K . In nevenstaande figuur hebben dan de paren A, A' en B, B' . We kunnen het paar A, A' ook opvatten als opvolgend U', U . De snijpunten $AB' \cap A'B = P$ en $B'U \cap BU' = Q$ bepalen nu de Pascal-lijn p van de zeshoek $AB'UA'B'U'$ (een en ander volgens de Stelling van Pascal).

Voor een willekeurig punt C van K (met toegevoegd punt C') geldt dan: $AC' \cap A'C (= R)$ ligt eveneens op de betreffende Pascal-lijn.

Gevolg

Als de punten C en C' op K samenvallen, dan is de lijn uit de bundel met top T de raaklijn uit T aan K . [einde Gevolg]

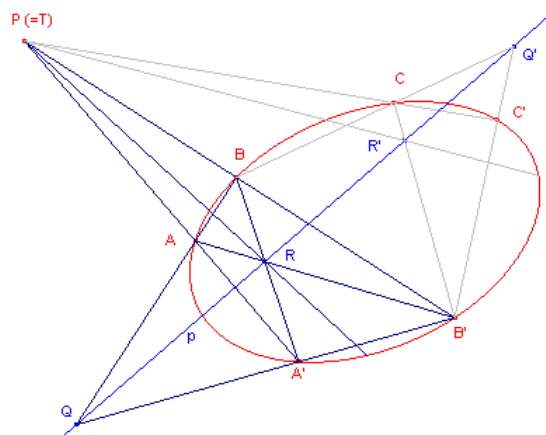
We bewijzen nu:

Stelling 2

De lijn p is de meetkundige plaats van het 4^e harmonische punt op de straal door T ten opzichte van de snijpunten van die straal met K .

Bewijs:

figuur 2b



Q en R zijn de diagonaalpunten van de volledige vierhoek $AA'B'B$.

Q' en R' zijn de diagonaalpunten van de volledige vierhoek $BCC'B'$.

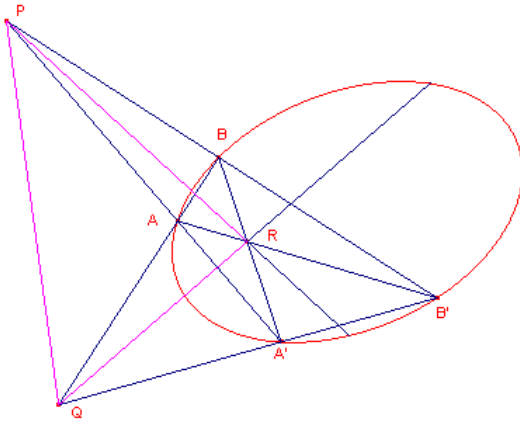
De lijn p is dus (conform de eigenschappen van de volledige vierhoek) de meetkundige plaats van de 2^e en 3^e diagonaalpunten wier 1^e diagonaalpunt het punt P is.

Of ook:

p is de meetkundige plaats van de 4^e harmonische met stralen door P tov. de snijpunten van die straal met de kegelsnede. ♦

We noemen de lijn p de **poollijn** van P ten opzichte van de parabool. Het punt P heet ook nu de **pool** van het punt P .

figuur 2c



Gevolgen

[1]

PR is de poollijn van Q en QP is de poollijn van R (zie figuur 2c).

[2]

Indien een punt op de kegelsnede ligt, dan is de raaklijn in dat punt tevens poollijn van dat punt tov. de kegelsnede.

[einde Gevolgen]

Driehoek PQR wordt een **pooldriehoek** van de kegelsnede genoemd.

Stelling 3

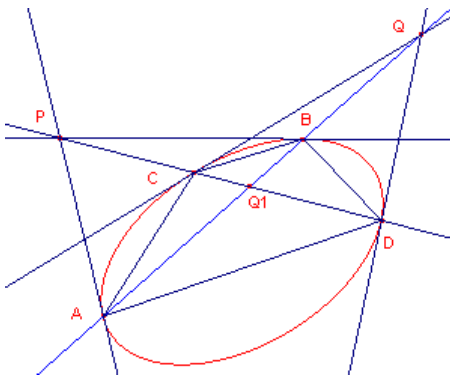
De poollijnen van de punten van p gaan door P

of

Als Q op de poollijn van P ligt, dan ligt P op de poollijn van Q .

Bewijs:

figuur 3



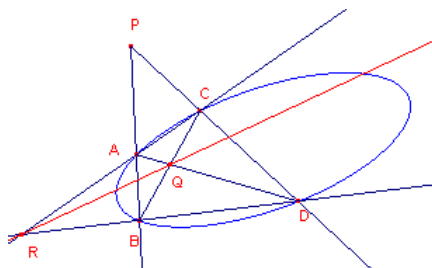
Zij Q een punt van p . Op deze lijn ligt dan het punt Q_1 zodat $(ABQQ_1) = -1$.

De lijn PQ_1 snijdt de kegelsnede in C en D .

De volledige vierhoek $ACBD$ is nu ingeschreven in de kegelsnede. P, Q en Q_1 zijn daarvan de diagonaalpunten (de hoekpunten van een pooldriehoek). ♦

Gevolg: constructies

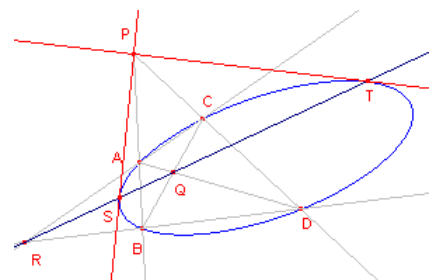
We kunnen nu eenvoudig de poollijn van een punt, de pool van een lijn en raaklijnen aan een gegeven kegelsneden construeren.



Poollijn van een punt P

Teken door P twee lijnen die de kegelsnede snijden in opvolgend de punten A, B en C, D .

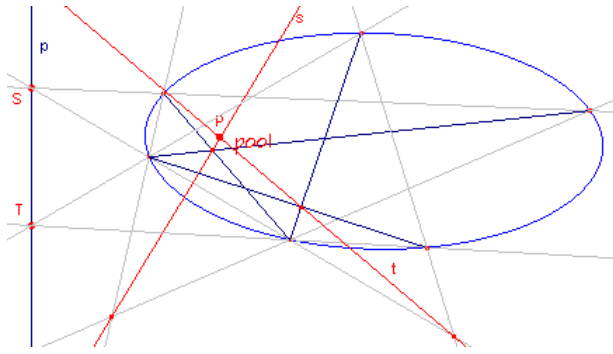
Deze vier punten bepalen een volledige vierhoek. Het tweede en derde hoekpunt (Q en R) van de pooldriehoek bij P bepalen dan de poollijn van P .



Raaklijnen uit P

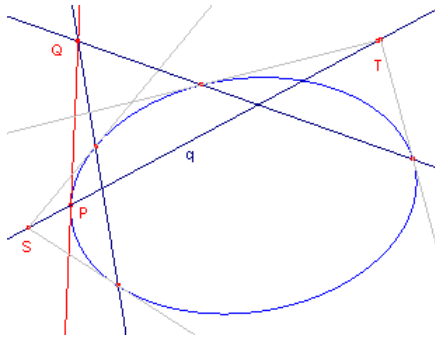
De poollijn van P snijdt de kegelsnede in S en T .

De lijnen PS en PT zijn de raaklijnen.



Pool van een lijn p

Kies op de lijn twee punten (S en T) en bepaal van elk van deze twee punten de poollijn tov. de kegelsnede (s en t). Het snijpunt P van de beide poollijnen is de gevraagde pool.



Raaklijn in een punt P

Kies op een willekeurige lijn q door P twee punten S en T en bepaal van deze punten de poollijnen tov. de kegelsnede. Verbind het snijpunt Q van deze lijnen met het punt P. PQ is de gevraagde raaklijn.

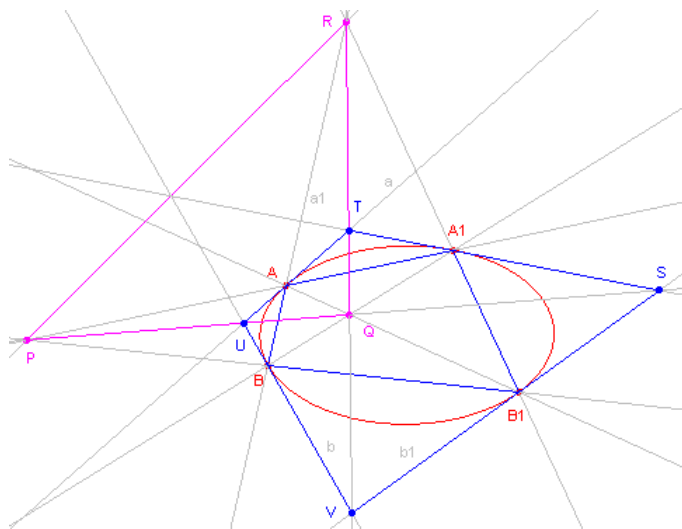
[einde Gevolg]

Stelling 4

Een ingeschreven vierhoek en de bijbehorende omgeschreven vierzijde hebben dezelfde pooldriehoek ten opzichte van een kegelsnede.

Bewijs:

figuur 5



Zie figuur 5.

De lijnen AB , A_1B_1 gaan door R . De polen van deze lijnen moeten dus op de poollijn van R liggen.

Deze polen zijn de raaklijnen a , b en a_1 , b_1 . De poollijn van R is PQ .

De bedoelde raaklijnen snijden elkaar dus op PQ (in U , en in S).

Op dezelfde manier kunnen we beredeneren, dat a , a_1 en b , b_1 elkaar snijden op QR (in T en in V); en ook dat a , b_1 en a_1 , b elkaar snijden op PR (deze snijpunten zijn niet van een naam voorzien).

Waaruit het gestelde volgt. ♦