

Reeksontwikkelingen

[Dick Klingens]
oktober 2001

1. Reeksontwikkeling van Taylor

Zij f een functie gedefinieerd op een zeker interval $\langle p; q \rangle$ en zij f op dit interval eindig vaak differentieerbaar. Stel nu $a \in \langle p; q \rangle$, dan geldt

$$(1.1) \quad f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) dt$$

Nu geldt:

$$(1.2) \quad \int_a^x f'(t) dt = \int_a^x f'(t) d(t-x)$$

Uit (1.1) en (1.2) volgt dan:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t) \frac{d}{dt}(t-x) dt$$

Verdere uitwerking geeft volgens de regel van de *partiële integratie*:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + [(t-x)f'(t)]_a^x + \int_a^x (x-t)f''(t) dt \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) - \int_a^x f''(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{(x-t)^2}{2} \right) \\ &= f(a) + (x-a)f'(a) - \left[\frac{(x-t)^2}{2} f''(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t) dt \end{aligned}$$

En opnieuw:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \int_a^x f'''(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{(x-t)^3}{3!} \right) dt \\ &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) - \left[\frac{(x-t)^3}{3!} f'''(t) \right]_a^x + \int_a^x \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t) dt \\ &= f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \frac{(x-a)^3}{3!} f'''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^3}{3!} f^{(4)}(t) dt \end{aligned}$$

Na eindig veel stappen vinden we dan:

$$(1.3) \quad f(x) = f(a) + \frac{(x-a)}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Dit alles in de veronderstelling dat f op het betreffende interval $(n+1)$ maal differentieerbaar is, en bovendien dat de $(n+1)$ de afgeleide van f bijvoorbeeld continu is (dit laatste om de differentieerbaarheid te garanderen).

De ontwikkeling (1.3) heet **reeksontwikkeling van Taylor**.

2. Reeksontwikkeling van MacLaurin

Zij nu $a = 0$. Het interval $\langle p; q \rangle$ waarop f gedefinieerd is, bevat dan dus $a = 0$.

De ontwikkeling van Taylor, (1.3), gaat nu over in:

$$(2.1) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{1}{n!} \int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

De reeksontwikkeling (2.1) heet **reeksontwikkeling van MacLaurin**.

Beide reeksen, (1.3) en (2.1), zijn genoteerd met behulp van de **integraalrestterm** R_n .

3. Restermen

Stelling 3.1 *Zijn f en g continu met terwijl $g(x) \geq 0$ op een interval $[a; b]$, terwijl op datzelfde interval $m \leq f(x) \leq M$, dan geldt:*

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx$$

Bewijs:

Nu is: $f(x) - m \geq 0$ en $f(x) - M \leq 0$, zodat

$$\int_a^b (f(x) - m)g(x) dx \geq 0 \text{ en ook } \int_a^b (M - f(x))g(x) dx \geq 0$$

Uit deze ongelijkheden volgt dan:

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \geq \int_a^b m \cdot g(x) dx = m \int_a^b g(x) dx \text{ en } \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \int_a^b M \cdot g(x) dx = M \int_a^b g(x) dx \quad \blacklozen$$

Gevolg

Er is een I met $m \leq I \leq M$, zodanig dat

$$(3.1) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = I \int_a^b g(x) dx$$

Daar f continu is, geldt dan $I = f(\mathbf{x})$, waarbij $a < \mathbf{x} < b$, zodat

$$(3.2) \quad \int_a^b f(x)g(x) dx = f(\mathbf{x}) \int_a^b g(x) dx \quad \blacklozen$$

Zij nu $R_n = \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$

In deze uitdrukking is $(x-t)^n$ tekenvast. Het Gevolg van Stelling 3.1 geeft (met $0 < q < 1$):

$$\begin{aligned} R_n &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a + q(x-a)) \int_a^x (x-t)^n dt \\ &= -\frac{1}{n!} f^{(n+1)}(a + q(x-a)) \left[\frac{(x-t)^{n+1}}{n+1} \right]_{t=a}^{t=x} \\ &= \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + q(x-a)) \end{aligned}$$

Deze laatste uitdrukking voor R_n heet de **restterm van Lagrange**.

In de literatuur komen ook de volgende resttermen voor:

Restterm van Schlömilch:
$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}(1-q)^{n+1-p}}{n!p} f^{(n+1)}(a + q(x-a))$$

waarbij p een willekeurig natuurlijk getal is.

Voor $p = n + 1$ krijgen we de restterm van Lagrange (zie boven).

Restterm van Cauchy:
$$R_n = \frac{(x-a)^{n+1}(1-q)^n}{n!} f^{(n+1)}(a + q(x-a))$$

Deze restterm volgt uit die van Schlömilch voor $p = 1$.

4. Toepassingen

4.1. We bekijken de functie f gedefinieerd door $f(x) = e^x$.

Volgens MacLaurin is dan

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n, \text{ waarin voor } 0 < q < 1 \text{ geldt } R_n = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{qx} \text{ (restterm van Lagrange).}$$

We beschouwen nu de uitdrukking $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n|$.

Nu is bij gegeven x : $1 < e^{qx} < e^x$, waaruit volgt dat e^{qx} begrensd is.

Zodat nu (nog steeds bij gegeven x):

$$|R_n| < \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = \frac{|x| \cdot |x| \cdots |x|}{1 \cdot 2 \cdots (n+1)} = p$$

Bij die gegeven x is het mogelijk een natuurlijk getal k te vinden, zodat $|x| \geq k$ en $|x| < k+1, k+2, k+3, \dots$

Dus:

$$p < L \frac{|x| \cdot |x| \cdots |x|}{(k+1)(k+1) \cdots (k+1)} = \frac{L|x|^{n-k+1}}{(k+1)^{n-k+1}}$$

De laatste uitdrukking nadert tot 0 als $n \rightarrow \infty$.

Met andere woorden: $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_n| = 0$.

Voor iedere x kunnen we dus schrijven:

$$(4.1) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

4.2. Voor $x = 1$ volgt uit paragraaf 4.1:

$$(4.2) \quad e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + R_n$$

met als restterm van Lagrange: $R_n = \frac{e^q}{(n+1)!}$

Voor $x = -1$ volgt uit paragraaf 4.1:

$$(4.3) \quad e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} + \frac{(-1)^{n+1} e^{-q}}{(n+1)!}$$

Hierbij geldt voor de restterm: $\left| \frac{(-1)^{n+1} e^{-q}}{(n+1)!} \right| < \frac{1}{(n+1)!}$

De schatting van de fout bij het afbreken na de n -de term is dus bij (4.3) kleiner dan bij (4.2).

We zullen met behulp van (4.3) bewijzen:

Stelling 4.1 *e is irrationaal.*

Bewijs:

Stel e is meetbaar (rationaal), dan is ook e^{-1} meetbaar met $e^{-1} = \frac{p}{q}$, waarbij p en q natuurlijke getallen zijn.

De uitdrukking (4.3) geeft dan

$$(4.4) \quad \frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{(-1)^q}{q!} + R_q$$

En hierbij is:

$$(4.5) \quad 0 < |R_q| < \frac{1}{(q+1)!}$$

Vermenigvuldiging van beide leden (4.4) met $q!$ leidt tot:

$$p(q-1)! = N + q! R_q, \text{ waarbij nu blijkt (4.5): } 0 < |q! R_q| < \frac{1}{q+1}$$

N is hierin een natuurlijk getal en $q! R_q$ is een breuk.

En dat, terwijl $p(q-1)!$ een geheel getal is.

Dit leidt tot een tegenspraak. Het getal e is dus irrationaal. ◆

$$e = 2,7182818284559\dots$$

4.3. We bekijken vervolgens de functie f gedefinieerd door $f(x) = \sin x$.

Voor de opvolgende afgeleiden van f vinden we:

$$f^{(1)}(x) = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$$

$$f^{(2)}(x) = -\sin x = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$$

\vdots

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(n \cdot \frac{\pi}{2} + x\right)$$

Zodat, via de reeksontwikkeling van MacLaurin:

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_{2n-1}, \text{ waarbij } R_{2n-1} = \frac{x^{2n} \sin\left(2n \cdot \frac{\pi}{2} + qx\right)}{(2n)!}$$

Nu is: $|\sin(2n \cdot \frac{\pi}{2} + qx)| < 1$, zodat voor vaste x : $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{2n-1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \right| = 0$.

Dus:

$$(4.6) \quad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

4.4. Voor de functie f gedefinieerd door $f(x) = \cos x$ vinden we op gelijke wijze:

$$(4.7) \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

4.5. We bekijken nu functies f_a gedefinieerd door $f_a(x) = (1+x)^a$, met a reëel en $x > -1$.

De opvolgende afgeleiden zijn:

$$f_a^{(n)}(x) = a(1+x)^{a-1}$$

$$f_a^{(2)}(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2}$$

\vdots

$$f_a^{(n)}(x) = a(a-1) \cdots (a-n+1)(1+x)^{a-n}$$

waarbij

$$f_a^{(n)}(0) = a(a-1)(a-2) \cdots (a-n+1)$$

De ontwikkeling volgens Taylor luidt dan:

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \dots + \binom{a}{n}x^n + R_n$$

waarbij de restterm volgens Cauchy luidt:

$$\begin{aligned} R_n &= (1-q)^n \frac{x^{n+1}}{n!} f_a^{(n+1)}(qx) \\ &= (1-q)^n \frac{x^{n+1}}{n!} \cdot a(a-1)(a-2) \cdots (a-n)(1+qx)^{a-n+1} \\ &= \left(\frac{1-q}{1+qx} \right)^n (1+qx)^{a-1} (n+1) \binom{a}{n+1} x^{n+1} \end{aligned}$$

Dat deze restterm een niet te verwaarlozen grootheid is (gelet op de factor x^{n+1} in de restterm), volgt uit de volgende ontwikkeling van $g(x) = x^k$, waarbij k geheel is en groter dan 0.

We hebben de volgende serie afgeleiden:

$$g^{(1)}(x) = kx^{k-1}; g^{(2)}(x) = k(k-1)x^{k-2}; \dots; g^{(n)}(x) = k(k-1)\dots(k-n+1)x^{k-n} \quad (\text{met } n \leq k)$$

Voor $n < k$ geldt: $g^{(n)}(0) = 0$, zodat

$$x^k = 0 + 0 + \dots + R_{k-1}$$

We vinden $R_{k-1} = x^k$.

5. Reeksontwikkeling door middel van integratie

5.1. We beschouwen de functie f gedefinieerd door $f(x) = \ln(1+x)$ met $x > -1$.

Voor deze functie geldt: $f'(x) = (1+x)^{-1}$.

En verder (algemeen):

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^{n-1} x^{n-1} + \frac{(-1)^n x^n}{1+x}$$

Door integratie van de laatste uitdrukking vinden we (voor $x > -1$):

$$\begin{aligned} \ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x (1-t+t^2-t^3+\dots+(-1)^{n-1}t^{n-1}) dt + \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_n \end{aligned}$$

waarin dus $R_n = \int_0^x \frac{(-1)^n t^n}{1+t} dt = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$

Ter nadere bepaling van de restterm onderscheiden we nu twee gevallen:

A: $x > 0$

B: $-1 < x < 0$

Geval A

Op het interval $[0; x]$ is $\frac{t^n}{1+t} \geq 0$, zodat $\frac{t^n}{1+t} \leq t^n$.

Hieruit volgt onmiddellijk:

$$|R_n| < \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Geval B

Bij vaste n wisselt de integrand op $\langle -1; x \rangle$ niet van teken.

Omdat $1+t \geq 1-|t|$ heeft de noemer de kleinste waarde voor $t = x$. Dus:

$$\left| \frac{t^n}{1+t} \right| \leq \frac{|t^n|}{1-|x|}$$

Bijgevolg geldt in dit geval:

$$|R_n| < \frac{1}{1-|x|} \int_0^{|x|} t^n dt = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)}$$

5.2. We beschouwen de functie f gedefinieerd door $f(x) = \arctan x$.

We hebben nu:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots + (-1)^{2n} x^{2n} + \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{1+x^2}$$

Door integratie volgt hieruit:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}$$

waarin $R_{2n+1} = (-1)^{n+1} \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1+t^2} dt$.

Ook hier kunnen we iets zeggen over de restterm. Er geldt namelijk:

$$|R_{2n+1}| < \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \left| \frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right|$$

Voor $x = 1$ staat er

$$\frac{p}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + R_{2n+1}$$

Hierbij geldt voor de restterm: $|R_{2n+1}| < \frac{1}{2n+3}$.

Zie verder ook paragraaf 8: Berekening van p .

6. Verdere beschouwing van de resttermen

6.1. Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde

We hebben gezien, dat een functie f die aan bepaalde voorwaarden voldoet, als volgt in een machtreeks kan worden ontwikkeld:

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f^{(1)}(0) + \frac{x^2}{2!} f^{(2)}(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + R_n(x)$$

We vragen ons nu af onder welke voorwaarden deze ontwikkeling kan worden voortgezet, d.w.z. of f in een *oneindige* machtreeks kan worden ontwikkeld.

Schrijven we:

$$f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{x^k f^{(k)}(0)}{k!} = R_n(x)$$

dan volgt:

$$f(x) - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k f^{(k)}(0)}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x)$$

Dus is:

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{x^k f^{(k)}(0)}{k!} \quad \text{DESDA} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

Een noodzakelijke en voldoende voorwaarde voor de ontwikkeling van een functie f in een *oneindige* machtreeks is dus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

In de volgende paragrafen beschouwen we enkele reeksontwikkelingen waarbij nog niets was opgemerkt over de restterm $R_n(x)$.

6.2. $f(x) = (1+x)^a$

In paragraaf 4.5 merkten we op:

$$(1+x)^a = \sum_{k=0}^n \binom{a}{k} x^k + R_n$$

waarin, volgens Cauchy: $R_n = \left(\frac{1-q}{1+qx} \right)^n (1+qx)^{a-1} (n+1) \binom{a}{n+1} x^{n+1}$

Voor de reeks $\sum \binom{a}{n} x^n$ bepalen we de convergentiestraal:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a(a-1) \dots (a-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a(a-1) \dots (a-n+1)} x = \frac{a-n}{n+1} x$$

zodat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a-n}{n+1} \right| \cdot |x| = |x|$$

De reeks is dus convergent voor $|x| < 1$.

Ook de reeks $\sum n \binom{a}{n} x^{n-1}$ is convergent voor $|x| < 1$, omdat deze reeks uit de gegeven reeks is ontstaan door differentiatie.

De algemene term nadert dus tot 0 als $n \rightarrow \infty$.

Na vervanging van n door $n + 1$ hebben we dus ook

$$(6.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \binom{a}{n+1} x^{n+1} = 0$$

Verder geldt, omdat $|x| < 1$:

$$(6.2) \quad (1+qx)^{a-1} < M$$

En ook

$$(6.3) \quad \frac{1-q}{1+qx} < 1 \text{ (voor } x \geq 0) \text{ en } 1+qx = 1-|qx| > 1-q \text{ (voor } -1 < x < 0):$$

Uit (6.1), (6.2) en (6.3) volgt dus:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0 \text{ voor } |x| < 1$$

Zodat:

$$(1+x)^a = 1 + \binom{a}{1}x + \binom{a}{2}x^2 + \binom{a}{3}x^3 + \dots \text{ voor } |x| < 1$$

6.3. $f(x) = \ln(1+x)$

Volgens paragraaf 5.1 is

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + R_n$$

waarin $|R_n| < \frac{1}{2n+3}$ (voor $x > 0$) en $|R_n| < \frac{x^{n+1}}{(n+1)(1-|x|)}$ (voor $-1 < x < 0$).

De reeks $\sum \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$ convergeert voor $-1 < x \leq 1$.

Voor $|x| < 1$ geldt dus $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, terwijl voor $x=1$ geldt $|R_n| < \frac{1}{n+1} \rightarrow 0$ indien $n \rightarrow \infty$.

Dus geldt:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \text{ voor } -1 < x \leq 1$$

6.4. $f(x) = \arctan x$

Volgens paragraaf 5.2 hebben we

$$\arctan x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n+1} \text{ met } |R_{2n+1}| < \frac{|x^{2n+3}|}{2n+3}$$

De reeks $\sum \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ is convergent voor $|x| \leq 1$, terwijl $\lim_{n \rightarrow \infty} |R_{2n+1}| = 0$ voor $|x| \leq 1$.

Dus geldt:

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \text{ voor } |x| \leq 1$$

7. Berekening van logaritmen

Voor $|t| \neq 1$ hebben we:

$$\frac{1}{1-t^2} = 1 + t^2 + t^4 + t^6 + \dots + t^{2n} + \frac{t^{2n+2}}{1-t^2}$$

Integratie geeft dan:

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \int_0^x \frac{t^{2n+2}}{1-t^2} \quad (|x| < 1)$$

In de restterm (restintegraal) heeft de noemer de kleinste waarde voor $t = x$, zodat de integrand dan hoogstens gelijk is aan $\frac{t^{2n+2}}{1-x^2}$. Gevolg:

$$|R_{2n+1}(x)| < \frac{1}{1-x^2} \left| \int_0^x t^{2n+2} dt \right| = \frac{|x|^{2n+3}}{(1-x^2)(2n+3)}$$

We vinden dan:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+1}(x)$$

Stellen we hierin $x = \frac{1}{2p+1}$, dan volgt:

$$(7.1) \quad \frac{1}{2} \ln \frac{1+p}{p} = \frac{1}{2p+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{(2p+1)^3} + \frac{1}{5} \frac{1}{(2p+1)^5} + \dots + \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{(2p+1)^{2n+1}} + R_{2n+1}(p)$$

waarbij

$$(7.2) \quad |R_{2n+1}(p)| < \frac{1/(2p+1)^{2n+3}}{(2n+3)(1-1/(2p+1))^2} = \frac{1}{2n+3} \cdot \frac{1}{4p(p+1)(2p+1)^{2n+1}}$$

Uit $|x| < 1$ volgt dat p alle waarden kleiner dan -1 en ook alle waarden groter dan 0 kan aannemen. Voor berekeningen hebben alleen de waarden $p > 0$ nodig.

We kiezen voor p opvolgend de waarden 15, 24 en 80. We krijgen dan met de gewone rekenregels voor logaritmen:

$$p = 15: \quad \ln \frac{16}{15} = 4 \ln 2 - \ln 3 - \ln 5$$

$$p = 24: \quad \ln \frac{25}{24} = -3 \ln 2 - \ln 3 + 2 \ln 5$$

$$p = 80: \quad \ln \frac{81}{80} = -4 \ln 2 + 4 \ln 3 - \ln 5$$

De getallen $\ln \frac{16}{15}$, $\ln \frac{25}{24}$, $\ln \frac{81}{80}$ zijn op basis van de reeksontwikkeling (7.1) met een nauwkeurigheid die kleiner is dan 10^{-10} , te benaderen (met slechts 3 termen uit de ontwikkeling; zie de restterm in (7.2)).

Voorbeeld

$$\ln \frac{16}{15} \approx 2 \left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{31^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{31^5} \right) = 0,06453852113 \text{ (met als werkelijke afgeronde waarde: } 0,06453852114 \text{)}.$$

Voor de bijbehorende restterm (met $n = 2$ en $p = 15$) hebben we:

$$R_5(15) < \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{60 \cdot 16 \cdot 31^5} \approx 3,63848 \cdot 10^{-11}$$

[einde Voorbeeld]

Uit de gevonden betrekkingen volgen dan eenvoudig de waarden van $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$.

Uit (7.1) volgt verder:

$$p = 40: \quad \ln \frac{50}{49} = 2 \ln 5 + \ln 2 - 2 \ln 7$$

waarmee we ook $\ln 7$ kunnen berekenen.

Hiermee zijn de logaritmen van $1 \dots 10$ met grote nauwkeurigheid bekend.

8. Berekening van π

In paragraaf 6.4 vonden we:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + R_{2n+1}$$

met als bijbehorende restterm: $|R_{2n+1}(1)| < \frac{1}{2n+3}$

Uit deze afchatting blijkt, dat bedoelde formule niet geschikt is om \boldsymbol{p} in een voldoende aantal decimalen te berekenen, tenzij men een groot aantal termen neemt.

Betere benaderingen van \boldsymbol{p} kunnen worden gevonden via de cyclometrische functies, bijvoorbeeld:

$$\frac{1}{4}\boldsymbol{p} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$$

of met de formule van Machin (1680-1751):

$$\frac{1}{4}\boldsymbol{p} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$