# Cabri-werkblad

## Scheve spiegeling

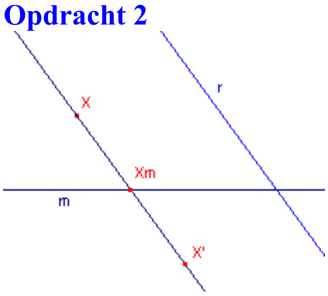
### 1. Inleiding

**Opdracht 1**
Teken op een nieuw werkblad een horizontale lijn *m* en een driehoek ABC (in het bovenste halfvlak).
Construeer het spiegelbeeld A'B'C' van driehoek ABC bij spiegeling in de lijn *m* (gebruik de functie "Spiegeling", in het *Afbeeldingen*-menu, het 6$^e$ menu van links).
Teken de lijnen AA', BB', CC'. Deze lijnen snijden de lijn *m* opvolgend in de punten $A_m$, $B_m$, $C_m$.

- Wat weet je van die lijnen?
- Wat weet je van de lijnstukken $AA_m$, $A'A_m$, $BB_m$, …?
- Wat weet je van de driehoeken ABC en A'B'C'?
- Beschrijf kort hoe je het spiegelbeeld van een willekeurig punt X kunt construeren ***zonder*** gebruik te maken van de functie "Spiegeling"?

### 2. Scheve spiegeling

**Opdracht 2**




Teken op een leeg werkblad opnieuw een (horizontale) lijn *m* en een lijn *r* die niet loodrecht staat op *m*; zie de figuur hiernaast.

- Beschrijf kort hoe je bij een gegeven punt X het beeldpunt X' kunt construeren.
- Bewijs: **de punten X en X' hebben gelijke afstand tot de lijn *m***.

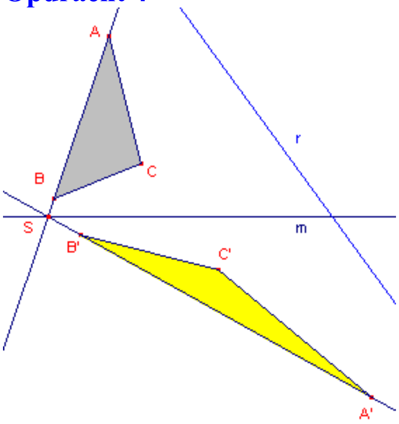
  ***Opmerking***
  Deze eigenschap zullen we in Opdracht 6 kunnen gebruiken.

De constructie die hierboven is uitgevoerd, noemen we een "**scheve spiegeling in de lijn *m* in de richting van de lijn *r***".
We zullen dit vaak kort schrijven als "**scheve spiegeling in *m*(*r*)**" of ook wel als "**lijnspiegeling *m*(*r*)**".
De lijn *m* heet ook hier de **spiegelas**. De lijn *r* bepaalt de "**spiegelrichting**".

**Opdracht 3**
Je zal in hetgeen volgt een dergelijke constructie vaker moeten uitvoeren. Het is daarom handig een macro samen te stellen die een scheve spiegeling van een punt uitvoert.
Ga uit van bovenstaande figuur (zie Opdracht 2) en pas de volgende "constructiestappen" toe.

- Kies de functie "Beginobjecten", in het *Macro*-menu.
- Selecteer het punt X, vervolgens de lijn *m* en dan de lijn *r* (de volgorde van *m* en *r* is belangrijk).
- Kies de functie "Eindobjecten", in het *Macro*-menu.
- Selecteer het punt X'.
- Kies de functie "Definieer macro", in het *Macro*-menu.
- Geef de macro de naam **SchSpiegeling**.
- Bewaar de macro op disk (selecteer het vakje naast de tekst "Opslaan in bestand").

### Opdracht 4




Construeer met de macro:SchSpiegeling het beeld A’B’C’ van een driehoek ABC.
***Opmerking***
Teken de beide driehoeken met de functie “Driehoek”, .
[einde Opmerking]

- Waarom zijn de driehoeken ABC en A’B’C’ nu *niet* congruent?
- Waarom snijden (bijvoorbeeld) de lijnen AB en A’B elkaar op de lijn *m* (zie het punt S)?

Ga door verplaatsing van driehoek ABC op het tekenblad na, dat dit ook geldt voor de andere zijden van de driehoeken.

## 3. Invariante eigenschappen

In de meetkunde zijn eigenschappen die bij een afbeelding niet veranderen, van belang (het onderzoeken waard).
Je hebt bij de *gewone* spiegeling (zie Opdracht 1) gezien, dat driehoek en beelddriehoek congruent zijn; anders gezegd:
de lengtes van lijnstukken en de grootte van hoeken veranderen niet (lengte en hoekgrootte zijn *invariant*).

Bij de scheve spiegeling is dat overduidelijk anders.
Maar ook bij de scheve spiegeling zijn enkele *invariante* grootheden!
Je hebt er hierboven zelfs al enkele ontdekt (zie Opdracht 2 en Opdracht 4).

### Opdracht 5

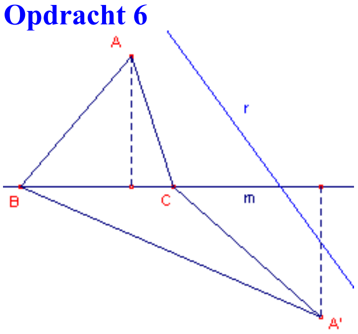
Ga uit van de figuur in Opdracht 4.
Kies de functie “Oppervlakte”,  in het *Reken*-menu (3$^{e}$ menu van rechts).
Bepaal de oppervlakte van driehoek ABC en die van driehoek A’B’C’.

Als het goed is heb je nu een illustratie van de volgende stelling:

**Stelling**
Bij een lijnspiegeling *m*(*r*) is de oppervlakte van een driehoek invariant.

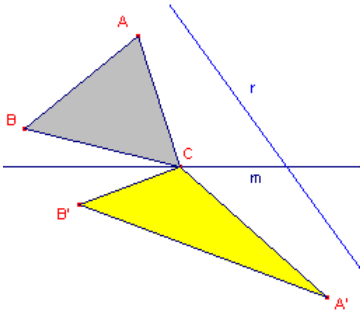
We zullen deze invariantie in de volgende opdracht bewijzen.

### Opdracht 6




Ga eerst uit van een driehoek ABC waarvan de hoekpunten B en C op de lijn *m* liggen.
We gebruiken de letter ‘V’ om de oppervlakte van een figuur aan te geven.

- Bewijs: **V(ABC) = V(A’BC)**
  ***Aanwijzing***
  Gebruik de eigenschap die je in Opdracht 2 hebt bewezen.



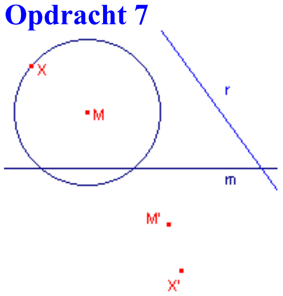

Kies vervolgens een driehoek waarvan slechts één hoekpunt (in dit geval het hoekpunt C) op de lijn *m* ligt.

- Bewijs: **V(ABC) = V(A’B’C)**
  ***Aanwijzing***
  Teken de lijnen AB en A’B’.

- Bewijs nu ook dat voor een willekeurige driehoek ABC geldt:
  **V(ABC) = V(A’B’C’)**

# 4. Het beeld van een cirkel

## Opdracht 7




Teken op een leeg tekenblad een cirkel met middelpunt M en willekeurige straal.
Kies op de cirkel een punt X (met de functie "PuntOpObject", in het *Punt*-menu).
Gebruik de macro:SchSpiegeling voor de constructie van de punten M' en X'.
🗎 Waarom is het beeld van de cirkel M *geen* cirkel?
Gebruik de functie "MeetkundigePlaats", in het *Constructie*-menu, om het beeld van de cirkel bij de lijnspiegeling $m(r)$ te bekijken.

Het beeld van de cirkel bij de lijnspiegeling $m(r)$ is een **ellips**.
Verplaats het punt M en wijzig ook de lengte van de straal van de cirkel.
Bekijk daarbij de verandering van de ellips.

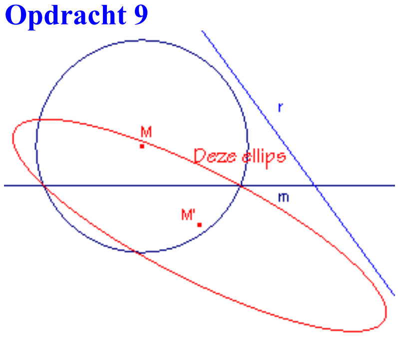
## Opdracht 8

Een ellips heeft twee symmetrie-assen.
Deze symmetrie-assen gaan door het middelpunt M' van de ellips.
Probeer de lijnen $p$ en $q$ te vinden (beide gaan door het middelpunt M van de cirkel; waarom?) die als beeld bij de lijnspiegeling $m(r)$ de symmetrie-assen van de ellips opleveren.

***Aanwijzing***
Verplaats de cirkel zo, dat het punt M samenvalt met het snijpunt van de lijnen $m$ en $r$.
[einde Aanwijzing]

Construeer de lijnen $p$ en $q$ en de beeldlijnen $p'$ en $q'$.
🗎 Geef een (korte) beschrijving van de constructie.

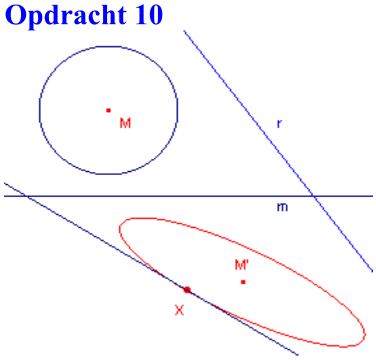
## Opdracht 9




Cabri herkent de meetkundige plaats (zie Opdracht 7) niet als een ellips.
Echter, een ellips is bepaald door 5 punten.
Kies daarom op de cirkel 5 punten waarvan je ook het beeld bij de lijnspiegeling $m(r)$ bepaalt.
Je zou 4 van deze punten kunnen kiezen op basis van hetgeen je in Opdracht 8 hebt gevonden.
Gebruik vervolgens de functie "Kegelsnede", in het *Cirkel*-menu, om een ellips door de 5 beeldpunten te tekenen.

Ga nu met de functie "Oppervlakte" na, dat ook de cirkel en de ellips een gelijke oppervlakte hebben.

## Opdracht 10




Kies op de ellips uit Opdracht 9 een willekeurig punt X (met "PuntOpObject").
Construeer in het punt X een raaklijn aan de ellips.
🗎 Geef een korte beschrijving van de constructie.

## Opdracht 11

De straal van de cirkel geven we aan met $R$.
De **assen van de ellips** zijn de delen van de symmetrie-assen die binnen de ellips gelegen zijn. De lengte van de grootste halve as is $a$; de lengte van de kleinste halve as is $b$.
Er is een verband tussen $R$ en $ab$.
🗎 Welk verband is dat?
🗎 Leid daaruit een formule af voor de oppervlakte van een ellips.