

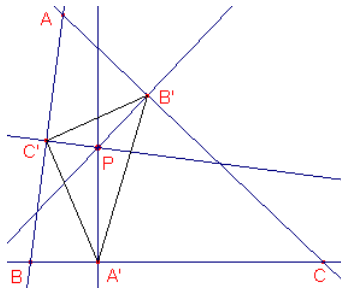
# Cabri-werkblad


## De lijn van Simson

### 1. Voetpuntsdriehoek

#### Opdracht 1

figuur 1



Teken op een nieuw werkblad drie punten: A, B, C. Teken ook de lijnen AB, BC, CA. (Teken-menu: Lijn, )

Teken nu een punt P (kies het punt P om te beginnen *binnen* driehoek ABC).

Teken de loodlijnen uit P op BC (snijpunt A'), op CA (snijpunt B') en op AB (snijpunt A').

Teken vervolgens driehoek A'B'C' (Teken-menu: Driehoek, )

Driehoek A'B'C' heet de **voetpuntsdriehoek** van het punt P (tov. driehoek ABC). De hoekpunten van de driehoek heten de **voetpunten van P** (tov. driehoek ABC).

Er zijn posities van het punt P waarvoor de drie zijden van A'B'C' samenvallen.

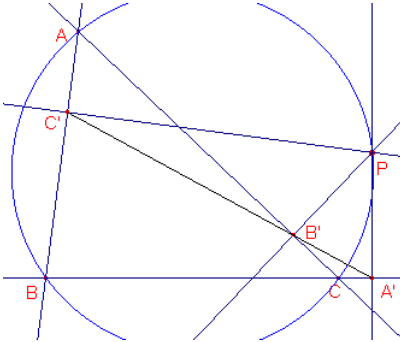
Ga na, dat dit zeker het geval is als P samenvalt met A, B of C.

Maar er zijn nog andere posities van P.


☞ Welke posities van P zijn dat? Geef een zo kort mogelijke beschrijving van je bevindingen.

#### Opdracht 2

figuur 2



Teken ook de omcirkel van driehoek ABC. Gebruik daarvoor eventueel de *macro:Omcirkel3P*.

Herdefinieer nu het punt P op deze omcirkel. Dit gaat via de functie "Herdefinieer object", , in het *Constructie*-menu.

Selecteer het punt P, kies uit het verschijnende menulistje de functie "Punt op object" en selecteer dan de omcirkel.

Verplaats het punt P nu op die omcirkel.

☞ Zijn je bevindingen in overeenstemming met die bij Opdracht 1?

Selecteer de "voetpuntsdriehoek" (Deze driehoek) en druk op de [Del] toets.

Teken nu de lijn door de punten A' en B' (C' ligt er dan automatisch op).

- Bewaar deze figuur in een bestand (bijv. onder de naam 'startsimson').

De lijn heet **de lijn van Simson van het punt P** (tov. de driehoek). We geven in hetgeen volgt deze lijn aan met  $s(P)$ .

#### Opmerking

Robert Simson (1687-1768, Schotland) heeft met de naar hem genoemde lijn helemaal niets van doen. De lijn is namelijk in 1797 ontdekt door een landgenoot van hem, William Wallace (1768-1843). De in de wiskundige literatuur meestal gebruikte naam is Simson-lijn (en niet Wallace-lijn). De lijn wordt ook wel **voetpuntsrechte van P** genoemd.

[einde Opmerking]

We hebben nu:

#### Stelling 1

*De voetpunten van een punt dat gelegen is op de omcirkel van een driehoek, liggen op een rechte lijn, de Simson-lijn van dat punt.*

We moeten deze stelling natuurlijk bewijzen.

De vraag is natuurlijk "hoe bewijs je dat drie punten op een lijn liggen (*collineair zijn*)?"

#### Opdracht 3

Kijk eens naar figuur 3a en merk op, dat het punt B' tussen A' en C' in ligt.

☞ Als A', B', C' collineair zijn, hoe groot is dan  $\angle A'B'C'$ ?

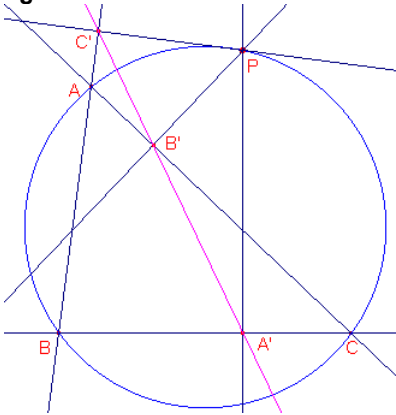
☞ Als A', B', C' collineair zijn, wat is er dan te zeggen van de hoeken AB'C' en CB'A'? Verklaar kort je antwoord.

We vervangen nu de eerder gesteld vraag door de opdracht – bewijs dat  $\angle AB'C' = \angle CB'A' - .$

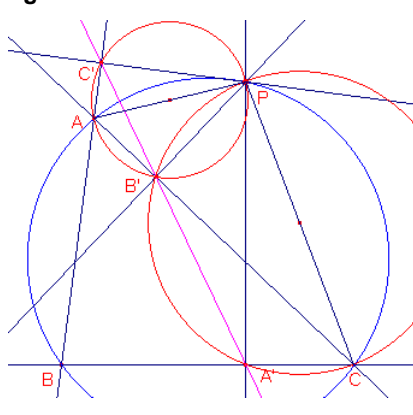
## 2. Bewijs

In figuur 3b hebben we nog twee lijnstukken, PA en PC, en twee cirkels toegevoegd.

figuur 3a



figuur 3b

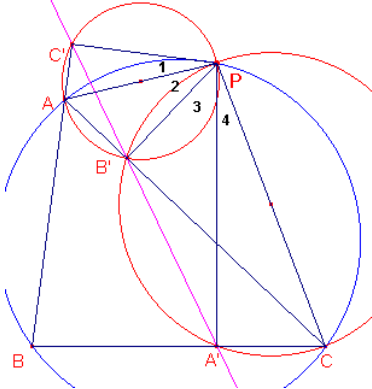


### Opdracht 4

- ☐ Waarom zijn de vierhoeken AB'PC' en CPB'A' koordenvierhoeken?
  - ☐ Wat zijn de getekende cirkels van deze koordenvierhoeken?
- In figuur 3b zijn nog twee andere koordenvierhoeken aan te wijzen.
- ☐ Welke zijn dat?

### Opdracht 5

figuur 4



In figuur 4 zijn de vier hoeken bij P genummerd. De hoeken van driehoek ABC geven we opvolgend aan met  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .

Nu geldt:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \beta = 180^\circ$$

$$P_2 + P_3 + P_4 + \beta = 180^\circ$$

- ☐ Verklaar deze uitdrukkingen.
- ☐ Wat kan je hieruit concluderen omtrent  $P_1$  en  $P_4$ ?
- ☐ Aan welke hoek in CPB'A' is  $P_4$  gelijk? Waarom?
- ☐ Aan welke hoek in AB'PC' is  $P_1$  gelijk? Waarom?
- ☐ Waarom zijn de punten A', B', C' nu collineair?

## 3. Tussenspel

We bewijzen in deze paragraaf een (wellicht al bekende) eigenschap van het hoogtepunt van een driehoek in samenhang met de omcirkel.

### Opdracht 6a

Kies een nieuw werkblad. Teken een driehoek ABC met z'n omcirkel.

Teken ook de hoogtelijnen uit A en B. Geef het hoogtepunt aan met H.

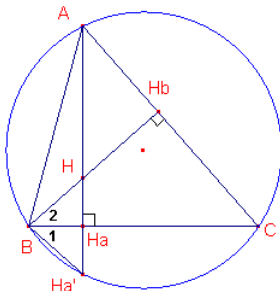
De hoogtelijn uit A snijdt de zijde BC in een punt dat meestal wordt aangegeven met  $H_a$ . Het snijpunt van deze hoogtelijn met de omcirkel geven we aan met  $H_a'$ .

Meet de afstand tussen de punten H en  $H_a$  en de afstand tussen de punten  $H_a$  en  $H_a'$ .

- ☐ Wat valt je op?
- Bekijk deze eigenschap voor verschillende driehoeken.

### Opdracht 6b

figuur 5



Voor het bewijs van de eigenschap uit Opdracht 6a tekenen we het lijnstuk  $BH_a'$ .

- ☐ Waarom zijn de driehoeken  $HBH_a$  en  $HAH_b$  gelijkvormig?
- ☐ Wat weet je nu van  $\angle B_2$  en  $\angle HAH_b$ ?
- ☐  $\angle HAH_b$  en  $\angle B_1$  zijn beide omtrekshoeken.
- ☐ Op welke boog van de omcirkel staan ze? Wat weet je nu van  $\angle HAH_b$  en  $\angle B_1$ ?
- ☐ Waarom zijn de driehoeken  $HBH_a$  en  $H_a'BH_a$  nu congruent?

We kunnen hetgeen we zojuist gevonden hebben ook als volgt formuleren:

**Stelling 2**

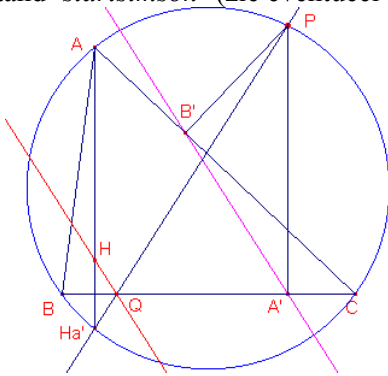
*Het spiegelbeeld van het hoogtepunt in een zijde van de driehoek ligt op de omcirkel van die driehoek.*

We zullen deze eigenschap in de volgende paragraaf gebruiken.

**4. Twee en meer Simson-lijnen**

**Opdracht 7a**

Laad het bestand 'startsimson' (zie eventueel Opdracht 1 en 2).  
**figuur 6a**

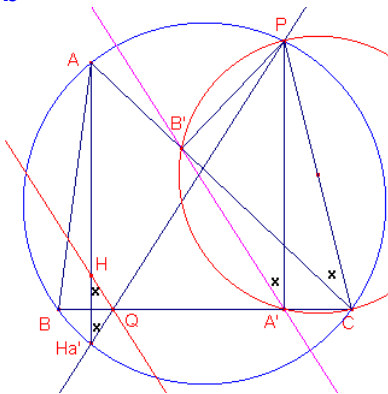


Teken in die figuur ook de hoogtelijn uit A en het hoogtepunt H. De lijn  $PH_{a'}$  snijdt de zijde BC van de driehoek in het punt Q. Teken ook de lijn HQ. Bekijk de positie van de lijn HQ ten opzichte van de lijn  $s(P)$ , als P over de omcirkel beweegt.  
 ☞ Wat is je conclusie?

Ook dit vraagt natuurlijk om een bewijs.

**Opdracht 7b**

**figuur 6b**



In figuur 6b zijn enkele gelijke hoeken met een **x** aangegeven.  
 ☞ Geef aan waarom deze hoeken inderdaad aan elkaar gelijk zijn (maak daarbij gebruik van de Stelling 2).  
 ☞ Bewijs op basis hiervan dat de lijnen HQ en  $s(P)$  evenwijdig zijn.

Een gevolg van deze laatste eigenschap is:

**Stelling 3**

*De lijn  $s(P)$  deelt het lijnstuk PH middendoor.*

**Opdracht 8**

☞ Bewijs nu zelf Stelling 3.

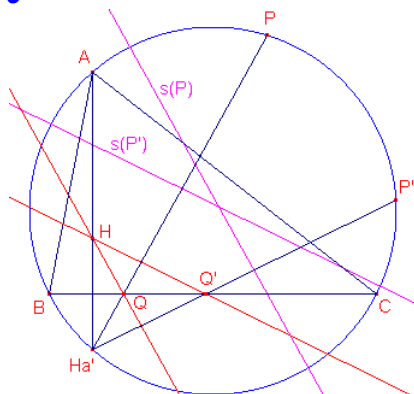
*Aanwijzing*

Toon eerst aan, dat de lijn  $A'B'$  zwaartelijn naar PQ is in de rechthoekige driehoek  $PA'Q$ .

Gebruik dan de eigenschap, dat HQ evenwijdig is met  $s(P)$  in driehoek PHQ.

**Opdracht 9**

**figuur 7**



In de figuur hiernaast zijn de Simson-lijnen van de punten P en P' getekend P en P' zijn willekeurige punten van de omcirkel).

☞ Bewijs dat de hoek tussen  $s(P)$  en  $s(P')$  gelijk is aan  $\frac{1}{2}bg(PP')$ .

*Aanwijzing*

Gebruik de in Opdracht 7b gevonden eigenschap.

Een gevolg hiervan staat in Stelling 4.

**Stelling 4**

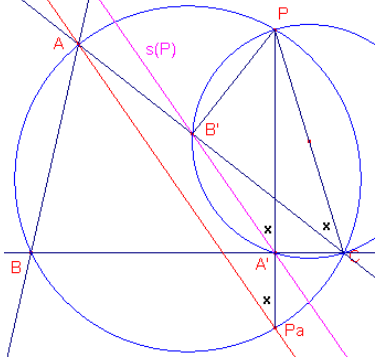
Wanneer de punten  $P$  en  $P'$  eindpunten zijn van een middellijn van de omcirkel van een driehoek, dan staan de lijnen  $s(P)$  en  $s(P')$  loodrecht op elkaar.

☞ Verklaar de juistheid van deze stelling!

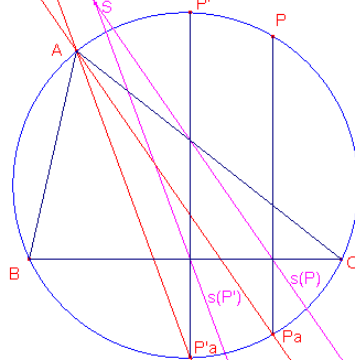
**Opdracht 10**

Het bewijs dat in Opdracht 9 werd gevraagd, kan ook op een iets andere manier worden gegeven. Bekijk daartoe eerst figuur 8a.

figuur 8a



figuur 8b



In figuur 8a is weer in enkele hoeken een **x** geplaatst om aan te geven dat die hoeken gelijk zijn.

De loodlijn uit  $P$  op  $BC$  snijdt de omcirkel in het punt  $P_a$ .

☞ Verklaar de juistheid van de in de hoeken geplaatste kruisjes.

☞ Bewijs hiermee dat  $AP_a \parallel s(P)$ .

In figuur 8b zijn de Simson-lijnen van twee willekeurige punten  $P$  en  $P'$  van de omcirkel getekend, evenals de punten  $P_a$  en  $P'_a$ .

☞ Bewijs nu opnieuw, maar op een andere manier dan in Opdracht 9, dat  $\angle(s(P), s(P')) = \frac{1}{2} \text{bg}(PP')$ .

**Opmerking**

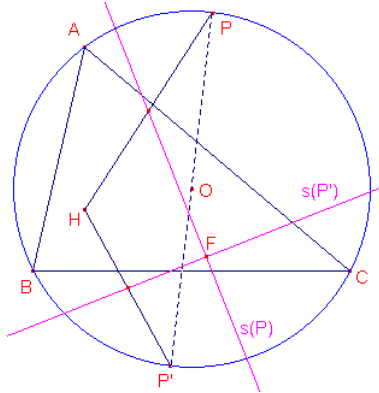
Uit figuur 8a volgt een snelle manier om de Simson-lijn van een punt  $P$  te tekenen.

☞ Beschrijf deze methode.

[einde Opmerking]

**Opdracht 11**

figuur 9



☞ Ga na wat de meetkundige plaats is van het snijpunt  $F$  van twee loodrecht op elkaar staande Simson-lijnen (zie Stelling 4).

☞ Geef hiervoor (indien mogelijk) een korte verklaring.

*Aanwijzing*

Kijk eens naar de vermenigvuldiging met een factor  $\frac{1}{2}$  ten opzichte van het punt  $H$  (oa. van de punten  $P$  en  $P'$ ) en denk aan de Thales-cirkel.