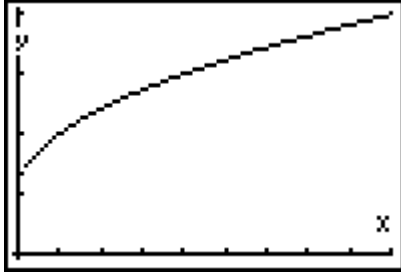


Werkblad TI83 - Riemann-sommen en GR

Het verdient aanbeveling de hieronder in de voorbeelden beschreven methodes "na te spelen". In de voorbeelden gebruiken we steeds functies die op een bepaald interval alleen niet-negatieve functiewaarden hebben.

Voorbeeld 1



In de figuur hiernaast is de grafiek getekend van de functie

$$f(x) = 1 + \sqrt{x}$$

op het domein $[0, 9]$.

Door met twee opvolgende deelpunten a en b ($a < b$) uit $0, 1, 2, \dots, 8$ van het domein rechthoeken te tekenen met a, b en $f(a)$ als hoekpunten, kunnen we een zogenoemde **ondersom** (liever **linkersom**) berekenen.

Op elk interval $[a, b]$ hebben we dus een rechthoek met $f(a)$ als hoogte. a en $f(a)$ zijn dus *linker* hoekpunten.

Nemen we de deelpunten a en b uit $1, 2, \dots, 9$ met a, b en $f(b)$ als hoekpunten, dan kunnen we een zogenoemde **bovensom** (liever **rechtersom**) berekenen. Hier zijn b en $f(b)$ dus rechter hoekpunten. De functiewaarden in de deelpunten zijn dus in beide gevallen de hoogte van een rechthoek.

De hierboven bedoelde linkersom (de som van de oppervlaktes van de rechthoeken) is gelijk aan (en ga dat na!):

$$(1 + \sqrt{0}) \cdot 1 + (1 + \sqrt{1}) \cdot 1 + (1 + \sqrt{2}) \cdot 1 + \dots + (1 + \sqrt{8}) \cdot 1 = 9 + (\sqrt{0} + \sqrt{1} + \dots + \sqrt{8})$$

De rechtersom is gelijk aan:

$$(1 + \sqrt{1}) \cdot 1 + (1 + \sqrt{2}) \cdot 1 + \dots + (1 + \sqrt{9}) \cdot 1 = 9 + (\sqrt{1} + \dots + \sqrt{9})$$

Nu kunnen we deze sommen, zij het met enige moeite, nog wel met de hand uitrekenen. We laten hierna echter zien hoe we dat met **Lijsten** op de GR kunnen doen.

In L_1 plaatsen we de getallen $0, 1, \dots, 9$ (de deelpunten en de begin- en eindwaarden van het interval).

Opmerking

Dit kan met de procedure `seq(`. Deze procedure is te vinden met `[LIST] <OPS> 5:seq(`.

[einde Opmerking]

We kunnen nu de functiewaarden toevoegen aan L_2 door aan de lijst L_2 een formule te koppelen.

Dit gaat op dezelfde manier als in het `[Y=]` menu.

seq(X, X, 0, 9) → L1				L1	L2	L3	2
0 1 2 3 4 5 6 ...				0	-----	-----	
				L2(1)=			
L1	WR	L3	2	L1	L2	L3	2
0		-----		0	-----	-----	
1				1	1.4142		
2				2	1.4142		
3				3	1.7321		
4				4	2.0000		
5				5	2.2361		
6				6	2.4495		
L2 = 1 + √(L1)				L2(1) = 1			

Plaats, via `[STAT] <EDIT> 1:Edit`, de cursor op L_2 , en typ daarna de formule $L_2 = 1 + \sqrt{(L_1)}$ (zie onderste regel van het scherm, in de linker figuur). Na het drukken op `[ENTER]` worden de functiewaarden berekend (zie rechter figuur hierboven).

Opmerking

Als in het `[Y=]` menu de functie f reeds is ingevoerd, kunnen we ook daaraan refereren (`>>>>`).

De functie Y_1 vinden we dan via `[VARS]`. Let er op, dat ook (L_1) daaraan moet worden toegevoegd.

[einde Opmerking]

L1	WR	L3	2
0		-----	
1			
2			
3			
4			
5			
6			
L2 = Y1(L1)			

Voor de linkersom moeten we nu de functiewaarden $f(0), f(1), \dots, f(8)$ bij elkaar tellen.

Voor de rechtersom zijn dat de functiewaarden $f(1), f(2), \dots, f(9)$.

We gebruiken daarvoor de procedure **cumSum** (via **[LIST] <OPS> 6:cumSum**), waarvan we de waarden aan Lijst L_3 toevoegen.

Op het rekenscherf doen we dat met (\gggg):

Opmerking

Dit kan ook in het Lijst-scherf door **cumSum(L2)** toe te voegen aan L_3 .

[einde Opmerking]

Via **[STAT]<EDIT>1:Edit** zien we deze waarden in een overzicht (\gggg).

De linkersom kunnen we nu direct aflezen in dit Lijst-overzicht.

LET OP: Dit is de waarde van $L_3(9)$!! Immers, de gewenste som is het 9e element in lijst L_3 .

De bedoelde linkersom is dus (in 3 decimalen) gelijk aan 25,306.

Met de rechtersom lukt dat niet direct door aflezen in de tabel, omdat we de eerste berekende waarde, de waarde van $f(0)$, niet mogen gebruiken; en deze staat in $L_3(1)$.

We berekenen daarom de rechtersom op het rekenscherf (\gggg):

De waarde van de gevraagde rechtersom is dus: 28,306.

De gemiddelde waarde van beide uitkomsten is eveneens een redelijke benadering van de oppervlakte onder de kromme lijn (tussen grafiek en x -as): 26,806.

Opmerking: de werkelijke van de oppervlakte is 27.

CUMSUM(L2)+L3		
(1	3	5.41421356...

L1	L2	L3	3
0	2.7321	0.1463	
.4	2.7321	11.146	
.8	2.2661	14.382	
1.2	3.4495	17.832	
1.6	3.6458	21.478	
2	3.8284	25.306	
---	---	---	
L3(9) = 25.3060005...			

L3(10)-L3(1)		
28.30600053		

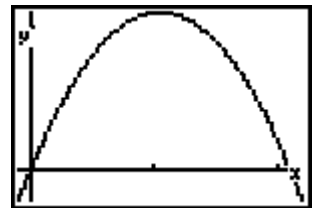
Voorbeeld 2

We gaan uit van de functie $f(x) = -x^2 + 2,1x$ op het domein $[0, 2]$.

We kiezen 5 deelintervallen met elk een lengte van 0,4.

Nb.

Maak nu eerst alle lijsten leeg met **ClrAllLists** (via **[MEM]4**).



De *linkersom* is nu gelijk aan:

$$(f(0) + f(0,4) + f(0,8) + f(1,2) + f(1,6)) \cdot 0,4$$

De *rechtersom* is gelijk aan

$$(f(0,4) + f(0,8) + f(1,2) + f(1,6) + f(2)) \cdot 0,4$$

L1	L2	L3	2
0	---	---	
.4	---	---	
.8	---	---	
1.2	---	---	
1.6	---	---	
2	---	---	
---	---	---	
L2(1) =			

L1	L2	L3	3
0	0	---	
.4	.68	---	
.8	1.04	---	
1.2	1.08	---	
1.6	.8	---	
2	.2	---	
---	---	---	
L3(1) =			

Voor de linkersom vinden we dan $3,6 \cdot 0,4 = 1,44$.

En voor de rechtersom $(3,8 - 0) \cdot 0,4 = 1,52$.

- ☐ Is de werkelijke waarde van de oppervlakte groter of kleiner dan de waarde 1,44? (Toelichten!)
- ☐ Is de werkelijke waarde van de oppervlakte groter of kleiner dan de waarde 1,52? (Toelichten!)

L1	L2	L3	3
0	0	0	
.4	.68	.68	
.8	1.04	1.72	
1.2	1.08	2.8	
1.6	.8	3.6	
2	.2	3.8	
---	---	---	
L3(7) =			

We kunnen in dit geval (*misschien is het zelfs beter*) een som nemen gebaseerd op de x -waarde van het **midden** van de intervallen; dat zijn de waarden:

0,2 0,6 1,0 1,4 1,8 (\gggg).

De benaderde waarde van de oppervlakte is dan $3,9 \cdot 0,4 = 1,56$.

Je zou deze som de **middensom** kunnen noemen.

Voor 10 deelintervallen hebben we, weer met de x -waarden van de middens en met 0,2 als lengte van elk deelinterval, (\gggg):

De benaderde waarde van de oppervlakte, tussen de grafiek en de x -as en op het interval $[0,2]$, is in dit geval: $7,7 \cdot 0,2 = 1,54$ (de werkelijke waarde is gelijk aan $1 \frac{8}{15} \approx 1,533$).

L1	L2	L3	3
2	.38	.38	
.6	.9	1.28	
1	1.1	2.38	
1.4	.98	3.36	
1.8	.54	3.9	
---	---	---	
L3(6) =			

L1	L2	L3	3
.9	1.08	3.6	
1.1	1.1	4.7	
1.3	1.04	5.74	
1.5	.9	6.64	
1.7	.68	7.32	
1.9	.38	7.7	
---	---	---	
L3(11) =			

Voorbeeld 3

We bekijken ook de functie $g(x) = -x^2 + 2x$ op het interval $[0, 2]$.

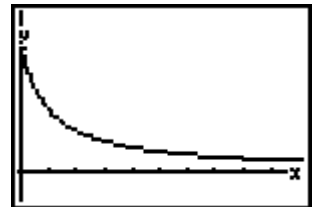
We nemen ook nu 10 deelintervallen waarbij de lengte van elk deelinterval dus weer gelijk is aan 0,2.

- ▣ Bereken op basis hiervan de waarde van de linkersom L en die van de rechtersom R .
- ▣ Als je hebt goed gedaan hebt, blijkt dat $L = R$. Verklaar waarom dat het geval is.
- ▣ Bereken in dit geval ook de middensom.

(De werkelijke waarde van de oppervlakte is hier $1\frac{1}{3}$.)

Voorbeeld 4

We bekijken vervolgens de functie $f(x) = \frac{1}{1+x}$ op het interval $[0, 10]$.



We kiezen dit keer 20 deelintervallen. Elk deelinterval heeft dan de lengte 0,5.

We berekenen hier **alleen** de *middensom*.

De x -waarde van het midden van het eerste deelinterval is $x_1 = 0,25$. Die van het midden van het 20ste interval is $x_{20} = 9,75$.

L1	L2	L3	1
6.75	.12903	4.1392	
7.25	.12121	4.2604	
7.75	.11429	4.3747	
8.25	.10811	4.4828	
8.75	.10256	4.5854	
9.25	.09756	4.6829	
9.75	.09302	4.7759	
L1(20)=9.75			

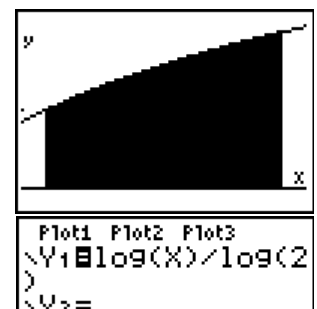
De benaderde waarde van de oppervlakte tussen de grafiek en de x -as op het beschouwde interval is dan: $4,7759 \cdot 0,5 = 2,388$.

De werkelijke waarde (in 3 decimalen) is gelijk aan: 2,398.

- ▣ Geef ook een benadering van de oppervlakte als we uitgaan van 40 deelintervallen (antwoord: 2,395).
- ▣ Kan je een verklaring geven, waarom de benaderde waarde in beide gevallen groter is, dan de werkelijke waarde?
- ▣ Lukt het je ook om een benadering te geven met 100 deelintervallen?

Voorbeeld 5

We bekijken de functie $h(x) = {}^2\log x$ met x in het interval $[2, 4]$.



De functie h kan in het [Y=] scherm worden vastgelegd als (>>>):

De opdracht luidt nu:

- Geef een benaderde waarde van de oppervlakte van het vlakdeel dat ligt tussen de grafiek van h , de lijnen $x = 2$ en $x = 4$ en de x -as.

Iemand (noem hem A) geeft op deze opdracht als antwoord: "Een benaderde waarde is 2". En iemand anders (B) zegt: "Die waarde is 4".

- ▣ Hoe komen beiden aan hun antwoord? Welk type som (linkersom, rechtersom of middensom) hebben ze gebruikt?

- ▣ Bereken zelf, op basis van een verdeling van het interval in 10 deelintervallen, de benaderde waarde (in twee decimalen) van de linkersom L , de rechtersom R en de middensom M (antwoorden: $L = 3,01$; $R = 3,21$; $M = 3,12$).

L1	L2	L3	1
R	1	1	
2.2	1.1375	2.1375	
2.4	1.263	3.4005	
2.6	1.3785	4.779	
2.8	1.4854	6.2645	
3	1.585	7.8494	
3.2	1.6781	9.5275	
L1(10)=2			

L1	L2	L3	1
R	1.0704	1.0704	
2.2	1.2016	2.272	
2.4	1.3219	3.594	
2.6	1.433	5.0269	
2.8	1.5361	6.563	
3	1.6323	8.1952	
3.2	1.7225	9.9177	
L1(10)=2.1			

- ▣ Bereken ook L , R en M bij 200 deelintervallen (antwoorden: $L = 3,11$; $R = 3,12$; $M = 3,11$)

Opmerking. De werkelijke waarde in drie decimalen 3,115.