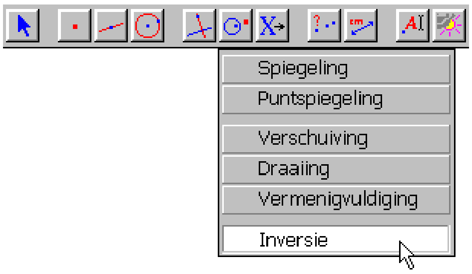
Cabri-werkblad: Inversie

1. Inleiding

In het *Afbeeldingen*-menu van Cabri vinden we naast de “gebruikelijke” afbeeldingen ook een functie (de onderste) die **Inversie** heet (zie figuur 1).

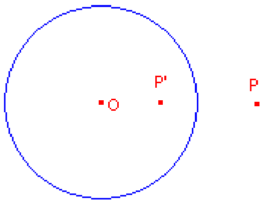
figuur 1



Heb je -bijvoorbeeld- bij de functie “Spiegeling” steeds een lijn nodig, de spiegelas, bij de “Inversie” maak je gebruik van een cirkel, de **inversiecirkel**.
In afwijking van alle andere functies in het *Afbeeldingen*-menu kan je de functie “Inversie” ***alleen*** toepassen ***op punten***.

Opdracht 1

figuur 2



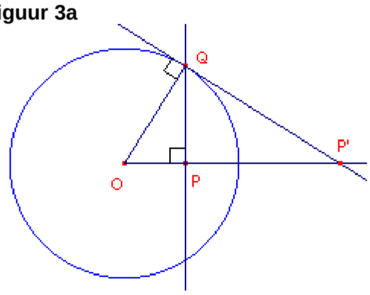
Teken op een nieuw werkblad een cirkel (met middelpunt O) en een punt P (*niet* op de cirkel).
Kies dan de functie “Inversie” en selecteer eerst P en daarna de cirkel.
Je ziet, dat de macro dan een tweede punt construeert.
Dit punt (geef het de “Naam” P’, p-accent) heet het **inverse beeld van P** bij deze inversie.
Ga de positie van het punt P’ na bij verandering van de positie van P.
Beschrijf kort je bevindingen. Geef daarbij antwoord op de volgende vragen:

a. Liggen de punten O, P en P’ op één lijn? (Hoe hebt je dat onderzocht?)
b. Wat gebeurt er met P’ als P in de buurt komt van O?
c. Wat is de positie van P’ als P op de cirkel ligt?
d. Wat gebeurt er als je de inversiecirkel groter of kleiner maakt?

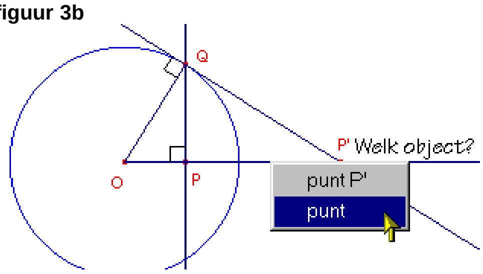
We zullen het verband tussen (de posities van) de punten O, P en P’ onderzoeken.

Opdracht 2

figuur 3a



figuur 3b



Kies een nieuw werkblad en teken daarop een cirkel (middelpunt O) en een punt P *binnen de cirkel.*
Teken de halve lijn OP en de loodlijn in P op deze lijn. De loodlijn snijdt de cirkel in twee punten. Noem een van deze punten Q en teken de loodlijn in Q op OQ. Deze lijn snijdt OP in het punt P’ (zie figuur 3a).

a. Welke bijzonderheid heeft de lijn P’Q (met betrekking tot de cirkel)?
Opmerking
Kijk eventueel op het Cabri-werkblad uit Teachers Info 15 (mei 1999) naar de macro:Raaklijn.
b. Toon aan, dat **OP : OQ = OQ : OP’**
Aanwijzing
Kijk eens naar de driehoeken OPQ en OQP’.
c. Als de we lengte van de straal van de cirkel k noemen, dan hebben we dus: **OP · OP’=k^2**.
Waarom is dit zo?
d. Hoe kan je, uitgaande van de positie van P’, het punt P construeren?
e. Kies nu de functie “Inversie”, selecteer P en de cirkel.
Ga na, dat er een tweede punt is geconstrueerd met dezelfde positie als P’ (zie figuur 3b).
f. Kies de functie “Inversie”, selecteer nu P’ en de cirkel.
Waar ligt nu het inverse punt van P’?

In het bovenstaande is de definitie van **Inversie** geïllustreerd:

Definitie
Het punt P' heet **inverse punt** van het punt P (bij de inversie ten opzichte van de cirkel met middelpunt O en straal *k*) als O, P en P' zo *op dezelfde lijn* liggen, dat $\mathbf{OP \cdot OP' = k^2}$.
Het middelpunt O heet wel het **centrum van inversie** (ook wel **inversiecentrum**).
Het getal k^2 heet de **macht van de inversie**.

2. Onderzoek

We kunnen nu ook verzamelingen van punten aan een inversie onderwerpen. We zullen dat stapsgewijs doen.

2.1
1e stap - Het inverse beeld van een rechte lijn die gaat door het centrum van inversie

Opdracht 3

a. Beredeneer, dat het inverse beeld van een lijn die gaat door het inversiecentrum, de lijn zelf is.
Men zegt dat zo'n lijn een **deklijn** van de inversie.

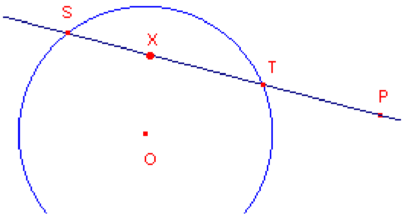
b. Elke deklijn heeft twee bijzondere punten. Deze punten worden wel **dekpunten** genoemd.
Welke punten zijn dat?
Van welk punt van de lijn kan je het inverse beeld niet bepalen?

c. Waarom kan je de inversiecirkel ook wel **dekcirkel** noemen?
We zullen verderop zien dat een inversie nog meer dekcirkels heeft.

2.2
2e stap - Het inverse beeld van een rechte lijn die niet door het inversiecentrum gaat

Opdracht 4

figuur 4



Neem een nieuw werkblad en teken daarop een inversiecirkel O.
Kies vervolgens een punt P buiten die cirkel en teken door P een willekeurige rechte lijn (*Teken*-menu: "Lijn"; selecteer P en vervolgens een punt dat *niet op de cirkel* ligt).
Ga na, dat je de lijn om het punt P kunt draaien.
Geef de lijn een positie waarbij deze de cirkel snijdt in de punten S en T (zie figuur 4).
Kies op de lijn een punt X tussen S en T (in het *Punt*-menu: "Punt op object").

a. Wat is het beeld van het punt S?
Wat is het beeld van het punt T?

b. Ligt het beeld X' van het punt X (*nog niet construeren!*) binnen of buiten de inversiecirkel? Waarom?
Maak duidelijk waarom het beeld van de lijn door P nooit een rechte lijn kan zijn.

c. Construeer nu het inverse beeld X' van het punt X.

Het zal duidelijk zijn, dat het beeld van de lijn nu moet gaan door de punten S, T en X'.
We kunnen de meetkundige plaats van de punten X' (en dat is dus het inverse beeld van de rechte lijn) met behulp van de functie "Meetkundige plaats" (in het *Constructie*-menu) door Cabri laten tekenen.

d. Voer deze constructie uit (selecteer eerst X' en dan X).

e. Welke conclusie trek je?

f. Draai nu de lijn rond het punt P (of verplaats het punt P).
Wat is het beeld van een lijn die de inversiecirkel niet snijdt?

Opdracht 5

a. Wat kan je zeggen van de positie van het punt X' als je X verplaatst naar een positie "ver weg" van het punt P (aan beide kanten)?

De meetkundige plaats van het punt X' is een cirkel die door O gaat (dat moeten we natuurlijk nog bewijzen; we zullen dat doen in paragraaf 3).
Men zegt wel, dat het punt O het beeld is van **het** *punt-op-oneindig* van de rechte lijn.

b. Een rechte lijn heeft dus (?) maar één punt-op-eindig.
Waaruit kan je dat concluderen?

2.3
3e stap - Het beeld van een cirkel die door O gaat

Opdracht 6

a. Beantwoord, *zonder een constructie te maken*, de volgende vraag:
"Wat het beeld is van een cirkel die door het punt O (het inversiecentrum) gaat?"
Geef een korte toelichting op je antwoord.

b. Voer ter controle de constructie uit.

2.4
4e stap - Het beeld van een cirkel die niet door O gaat

Opdracht 7

Neem een nieuw werkblad en teken daarop een inversiecirkel O.
Teken ook een cirkel (met middelpunt M) die niet door het punt O gaat.

a. Construeer nu, met de functie "Meetkundige plaats" het beeld van cirkel M.
Geef kort aan *hoe* je dat gedaan hebt.
Wat is het beeld van zo'n cirkel, denk je ("zeker weten", betekent "bewezen hebben"!)?

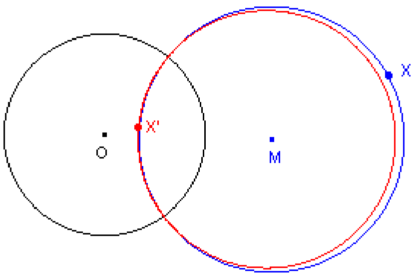
b. Is het inverse beeld van het middelpunt M ook het middelpunt van het beeld van de cirkel?
Licht je antwoord toe.

Opdracht 8

Je kunt nu uitgaan van de figuur die je in Opdracht 7 hebt gemaakt.
Hierboven (in Opdracht 3) spraken we al even over **dekcirkels**.

a. Verplaats het punt M nu zo, dat het beeld van cirkel M met cirkel M zelf samenvalt.
(Je kan dit ook bereiken door de straal van de inversiecirkel te vergroten of te verkleinen)

figuur 5



In figuur 5 is het beeld van cirkel M getekend bij een inversie ten opzichte van de inversiecirkel O.
Het punt X ligt op cirkel M.
Het punt X' is het inverse beeld van X (op de beeldcirkel).
De positie van M is zodanig, dat het origineel en het beeld "bijna" samenvallen.

Natuurlijk is nu de vraag hoe (waar) je M moet kiezen om dit (echt) te bereiken: dus "construeer een cirkel M zodat het beeld van die cirkel ermee samenvalt.
Dat kan niet moeilijk zijn, immers, je weet nu iets van de punten X en X' (kijk nog eens naar figuur 5).

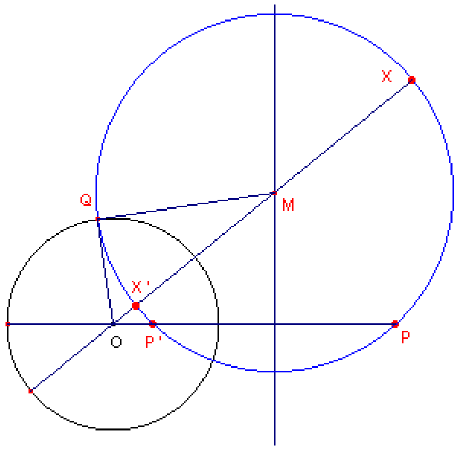
b. Wat weet je van X en X'?

c. Als je dus uitgaat van een punt X, dan kan je zo'n cirkel construeren.
Beschrijf hoe je dat kan doen.

Opdracht 9

Bekijk de volgende figuur.

figuur 6



Deze figuur is als volgt ontstaan.
De punten P en P' zijn inverse punten bij de inversie met cirkel O als inversiecirkel (met straal *k*).
Het punt M is een willekeurig punt van de middelloodlijn van PP'.
Cirkel M (met straal *R*) gaat door P (en dus ook door P').
De lijn OM snijdt cirkel M in de punten X en X'.
Eén van de snijpunten van cirkel M en cirkel O is het punt Q.

a. Toon aan, dat X en X' inverse punten zijn bij deze inversie.

b. Teken ook een willekeurige lijn door O die cirkel M snijdt in de punten Y en Y'.
Wat weet je nu van Y en Y'? Verklaar je antwoord kort.

c. Zij OM = *d*.
Druk OX en OX' uit in *d* en *R* (de straal van cirkel M).
Bewijs nu, dat $\boldsymbol{k^2 + R^2 = d^2}$.
Wat weet je dan van driehoek OMQ?

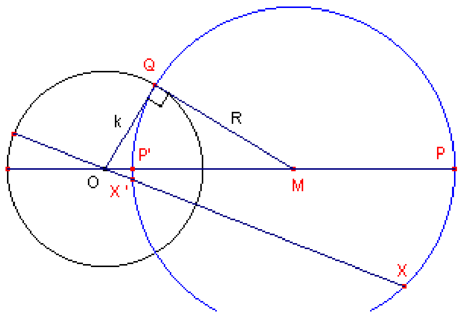
Omdat OQ loodrecht staat op MQ, zegt men dat de beide cirkels (de inversiecirkel en de cirkel M) elkaar **loodrecht snijden**.
We hebben nu bewezen:

Stelling 1
Als bij een inversie een cirkel (niet zijnde de inversiecirkel) een dekcirkel is, dan snijden die cirkel en de inversiecirkel elkaar loodrecht.

Opdracht 10
Bewijs ook de omgekeerde stelling:

Stelling 2
Als twee cirkels elkaar loodrecht snijden, dan is de ene cirkel dekcirkel bij een inversie met de andere cirkel als inversiecirkel.

figuur 7



Aanwijzing
In figuur 7 staan enkele gegevens (oa. dat hoek Q een rechte hoek is).
Kies cirkel O als inversiecirkel (de straal is *k*).
Je moet nu dus bewijzen, dat $OX \cdot OX' = k^2$.

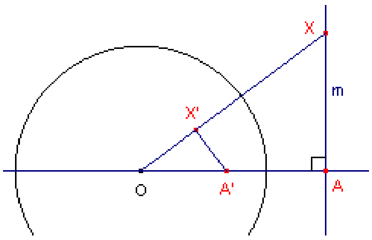
3. Iets vergeten?
Na alle bewijzen hebben we het belangrijkste bijna vergeten.
Kijk nog eens naar Opdracht 5 en Opdracht 7.

We bewijzen nu:

Stelling 3
[1] Bij een inversie met centrum O is het inverse beeld van een rechte lijn die niet door O gaat, een cirkel.
[2] Bij een inversie met centrum O is het inverse beeld van een cirkel die niet door O gaat een cirkel.

Eerst maar het eerste deel van de stelling [1].

Opdracht 11
figuur 8

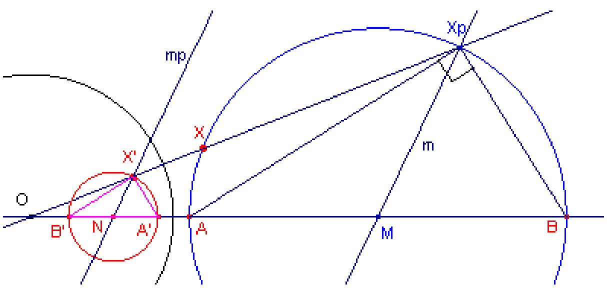


m is de gegeven lijn.
In de figuur is door O de lijn loodrecht op *m* getekend. Deze lijn snijdt *m* in A.
A' is het inverse punt van A.
X is een willekeurig punt van *m*.
X' is het inverse beeld van X.
We moeten nu aantonen, dat X' op een cirkel ligt.

a. Geef daarvan het bewijs.
Aanwijzing
Denk aan de Thales-cirkel.
Kijk dan eens naar de driehoeken OA'X' en OXA. Wat weet je van deze driehoeken?
b. Hoe kan je het middelpunt van de beeldcirkel vinden?

Opdracht 12
En vervolgens het tweede deel [2].

figuur 9



In deze figuur is X een willekeurig punt van cirkel M.
X' is het inverse beeld van X.
De lijn OM snijdt cirkel M in de punten A en B.
A' en B' zijn de inverse punten van resp. A en B.
De lijn OX snijdt cirkel M voor de tweede keer in het punt X_P.
m_P is de lijn door X' evenwijdig aan de lijn MX_P (*m*).
Deze lijn snijdt OM in het punt N.

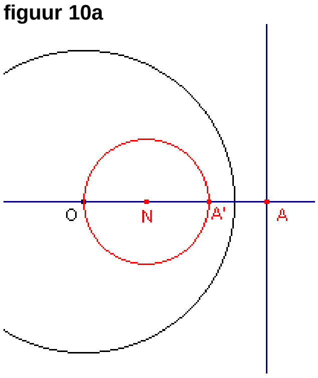
Waarom is N het midden van het lijnstuk A'B'?
X' is het beeld van X_P bij een ander soort afbeelding (dan de inversie). Welke?
Wat weet je dus van de driehoeken ABX_P en A'B'X'? Waarom?
Welke eigenschap heeft driehoek A'B'X'?
Waarom ligt het punt X' op een cirkel?
Opmerking
Je ziet uit figuur 9 nu ook hoe je het middelpunt van de inverse cirkel van een cirkel moet construeren.
Let wel: Het inverse punt van M is *niet* het punt N!

4. Macro's

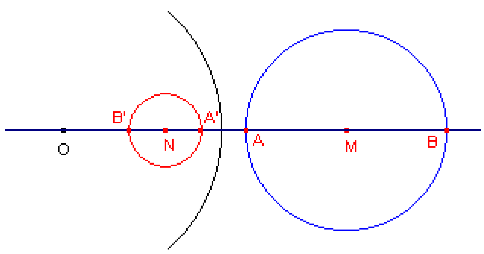
Voor hetgeen volgt, zijn twee macro's wel erg handig:
[a] een macro die het inverse beeld construeert van een lijn die niet door het inversiecentrum gaat;
[b] een macro die het inverse beeld construeert van een cirkel die niet door het inversiecentrum gaat.

De tekeningen waarmee je deze macro's kan maken staan in de volgende figuren.

figuur 10a



figuur 10b



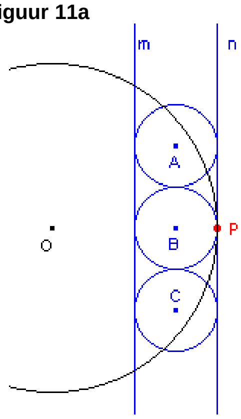
Opmerkingen
1. Kies als "Beginobjecten" eerst het object waarvan je het beeld wilt vinden en daarna de inversiecirkel.
2. Kies als "Eindobjecten" de beeldcirkel en het middelpunt ervan.
3. Verberg in figuur 10b eerst de punten A' en B' voordat je de macro definieert.

(Macro's met de namen **InversieLijn** en **InversieCirkel** kunnen mogelijk ook door de docent worden verstrekt).

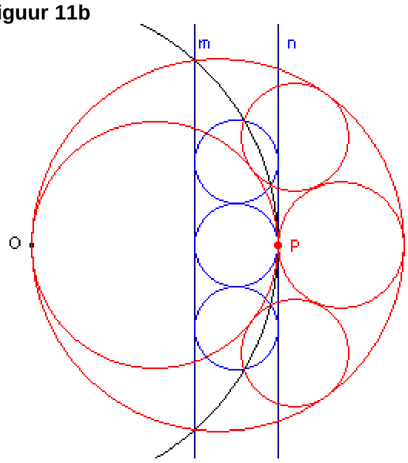
5. Enkele opgaven

We kunnen met inversie bepaalde problemen die met cirkels te maken hebben, handig oplossen.
We geven allereerst een voorbeeld

figuur 11a



figuur 11b



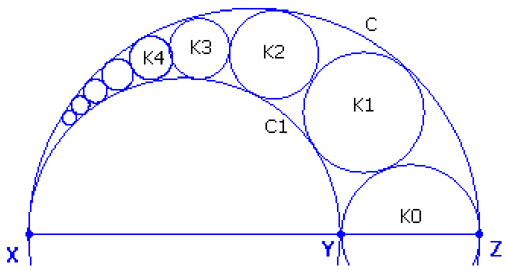
In figuur 11a zijn drie cirkels (A, B, C) getekend die elkaar uitwendig raken en die tevens raken aan twee evenwijdige lijnen *m* en *n*.
De lijn OP (niet getekend) gaat door B en staat loodrecht de lijn *n*.
We kiezen de cirkel (O, OP) als inversiecirkel.
Het gevolg van deze inversie zien we in figuur 11b.

Opdracht 13

Neem op een nieuw werkblad figuur 11a over en construeer figuur 11b met behulp van de macro:InversieLijn en de macro:InversieCirkel.

De constructie uit Opdracht 13 geeft een oplossing van een beroemd probleem uit de Griekse oudheid, het schoenmakersmes (arbelos). Het probleem stamt vermoedelijk uit 300 v. Chr.
In figuur 12 staat de arbelos; het is het vlakdeel dat binnen de grote halve cirkel (C) ligt en buiten de beide kleinere (C_1 en K_0).
De bedoeling is een rij cirkels (K_1, K_2, …) te construeren die C_1 uitwendig en C inwendig raken. Daarnaast moet elk exemplaar ook aan het voorgaande raken.

figuur 12

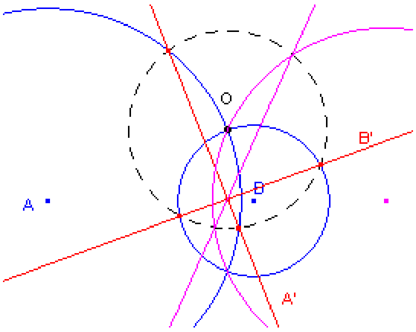


Opdracht 14

Ga uit van de arbelos en construeer een serie cirkels binnen de arbelos.
Kies daartoe eerst een lijnstuk XZ, met daarop ("Punt op object") het punt Y.

Opdracht 15

figuur 13



Gegeven zijn elkaar snijdende cirkels A en B; zie figuur 13.
Kies één van de snijpunten van de cirkels als centrum van inversie; laat de inversiecirkel beide cirkels snijden.

a. Waarom zijn de beelden van cirkel A en cirkel B rechte lijnen?

b. Kies de kleinste hoek tussen deze twee rechte lijnen en construeer daarvan de bissectrice (deellijn).
Inverteer deze deellijn.
Wat is het beeld?

c. Ga na, dat dit beeld de inversiecirkel is die cirkel A naar cirkel B inverteert (en natuurlijk ook omgekeerd).
Geef hiervoor een verklaring.
Deze inversiecirkel heet **middencirkel** van de cirkels A en B.

d. De cirkels A en B hebben nog een tweede middencirkel.
Construeer ook deze middencirkel.

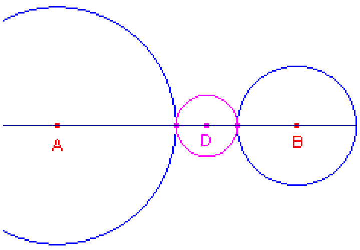
Opdracht 16

Toon met behulp van inversie aan, dat twee elkaar rakende cirkels slechts één middencirkel hebben.
Illustreer het bewijs met een constructie.
Kan je iets zeggen over het middelpunt van die middencirkel?

Opdracht 17 **(moeilijk)**

Ook twee niet-snijdende cirkels hebben precies één middencirkel.
Construeer deze middencirkel.

figuur 14

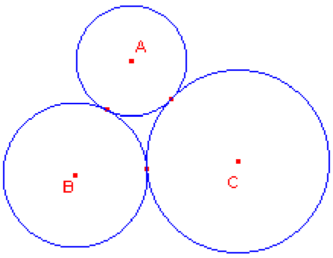


Aanwijzingen

1. Kijk eerst eens naar Opdracht 12. Daaruit kan je zeker afleiden wat het middelpunt van de middencirkel is.
2. Bedenk verder eens wat het inverse beeld moet zijn van de cirkel D die “tussen” (en rakend aan) de cirkels A en B getekend is, bij de inversie met de middencirkel van A en B als inversiecirkel.
3. Zie verder ook Stelling 1 (na opdracht 9).

Opdracht 18

figuur 15



Zie figuur 15.
Gegeven zijn drie cirkels A, B en C die elkaar twee aan twee raken (op zich al leuk om te construeren) .
Construeer de beide cirkels (een inwendige en een uitwendige) die aan deze drie cirkels raken.
Gebruik daarbij natuurlijk inversie.

Opmerking

De beide cirkels heten Soddy-cirkels (genoemd naar Sir Frederick Soddy, 1877-1956, die in 1921 de Nobelprijs voor scheikunde ontving voor zijn ontdekking van isotopen).